Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 1.

On considère le polynôme $P(z)=z^4-2z^3-2z-1$.

1. Calculer P(i) et P(-i).
2. En déduire que $P(z)=(z^2+1)(az^2+bz+c)$, a, b et c étant 3 réels que l'on déterminera.
3. En déduire la résolution de P(z) = 0.

Exercice 2.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=3+i$ et $z_B=1-i$. Soit M un point d'affixe z.

1. Déterminer l'ensemble E des points M tels que $\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ soit un imaginaire pur.
2. Déterminer l'ensemble F des points M tels que $\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|=2$.

Exercice 3.

On considère le nombre complexe j défini par $j=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

1. Montrer que $1+j+j^2=0$ et que $-j^2=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$.
2. On considère la rotation R de centre C, d'affixe c, et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. A tout point M d'affixe z, la rotation associe le point M' d'affixe z'.
   a. Montrer que: $z'=-j^2z-jc$.
   b. En déduire que le triangle ABC dont les sommets ont pour affixes respectives a, b, c est équilatéral si et seulement si $a+bj+cj^2=0$ ou $a+bj^2+cj=0$.

Exercice 4.

Soit la suite de nombres complexes z_n définie par: $z_0=2, z_{n+1}=\dfrac{1}{4}(1+i\sqrt{3})z_n$.

Dans le plan complexe, les images respectives des nombres z_n de la suite sont des points notés M_n.

1. Calculer les nombres z_1, z_2, z_3 et placer leurs images sur une figure.
2. Calculer le quotient $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$.
   En déduire la nature du triangle OM_nM_{n+1}.
3. Pour un entier naturel n, on pose $\rho_n=|z_{n+1}-z_n|$.
   Montrer que la suite des nombres ρ_n est une progression géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
4. Calculer la limite de la somme des termes de cette suite quand n tend vers l'infini.