Partie I

1. a) $j = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $j^3 = (\exp(2i\pi/3))^3 = \exp(2i\pi) = 1$.

c) $1 + j + j^2 = \dfrac{1 - j^3}{1 - j} = 0$.

d) $-j^2 = 1 + j = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \exp(i\pi/3)$.

2. On a les équivalences suivantes :
MNP équilatéral direct

$\Leftrightarrow$ R(N,π/3)(P)=M

$\Leftrightarrow m - n = e^{\frac{i\pi}{3}}(p - n)$

$\Leftrightarrow m - n = -j^2(p - n)$

3. On a :

$m - n = -j^2(p - n)$

$\Leftrightarrow m - (1 + j^2)n + j^2 p = 0$

$\Leftrightarrow m + jn + j^2 p = 0$

Donc : MNP équilatéral direct $\Leftrightarrow m + jn + j^2 p = 0$.

Partie II

On a les équivalences suivantes :
MNP équilatéral

$\Leftrightarrow$ MNP équilatéral direct ou MPN équilatéral direct

$\Leftrightarrow m + jn + j^2 p = 0$ ou $m + jp + j^2 n = 0$

$\Leftrightarrow (m + jn + j^2 p)(m + jp + j^2 n) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + jmp + j^2 mn + jmn + j^2 np + j^3 n^2 + j^2 mp + j^3 p^2 + j^4 np$

$\Leftrightarrow m^2 + n^2 + p^2 + (j + j^2)(mn + mp + np) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + n^2 + p^2 = mn + mp + np$

Donc : MNP équilatéral $\Leftrightarrow m^2 + n^2 + p^2 = mn + mp + np$.

Partie III

Les triangles BOA, CDO et OEF sont isocèles et l'un de leurs angles vaut $\pi/3$, donc ils sont équilatéraux. On notera qu'ils sont directs.
On peut supposer que O est l'origine du repère. On a donc :

$b + j^2 a = 0$, $c + jd = 0$ et $je + j^2 f = 0$.

M = m[BC], N = m[DE] et P = m[AF], donc $m = (b + c)/2$, $n = (d + e)/2$ et $p = (a + f)/2$.

On a :

$$\begin{aligned} 2(m + jn + j^2 p) &= b + c + j(d + e) + j^2(a + f) \\ &= (b + j^2 a) + (c + jd) + (je + j^2 f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que le triangle MNP est équilatéral direct.