Exercice 1.

a) En posant z = x + iy, $\overrightarrow{IM}(x, y-1)$, $\overrightarrow{IM}'(-y, x-1)$
Il s'ensuit :
I, M, M' alignés
$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM}') = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -y \\ y-1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1) + y(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1/2)^2 + (y-1/2)^2 = 1/2$

Le lieu des points M est le cercle de centre $\Omega(1/2, 1/2)$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.

b) M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
Le lieu des points M' est donc le cercle de centre $\Omega'(-1/2, 1/2)$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.

Exercice 2.

$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. $P(i\sqrt{3}) = 0$ et $P(-i\sqrt{3}) = 0$, on en déduit qu'il existe un polynôme Q de degré 2 tel que, pour tout z, $P(z) = (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3})Q(z) = (z^2 + 3)Q(z)$.
On peut chercher Q par division euclidienne ou par identification en posant $Q(z) = z^2 + bz + c$.
On trouve alors $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$.

2. Pour tout z, on a :
$z^2 - 6z + 21 = (z-3)^2 + 12 = (z-3)^2 - (2i\sqrt{3})^2 = (z - 3 - 2i\sqrt{3})(z - 3 + 2i\sqrt{3})$.
Donc P(z) = 0 si et seulement si $z \in \left\{ i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 3 + 2i\sqrt{3}, 3 - 2i\sqrt{3} \right\}$.

3. $A(0, \sqrt{3})$, $B(0, -\sqrt{3})$, $C(3, 2\sqrt{3})$, $D(3, -2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC}(3, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{AD}(3, -3\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 0$.
Le triangle ACD est rectangle en A; A, C et D appartiennent au cercle de diamètre [CD], le centre de ce cercle est le point de coordonnées (3,0). Ce cercle est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, donc B appartient aussi à ce cercle. Les points A, B, C et D sont cocycliques.

4. $z_E = -z_D$, on a : $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \dfrac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$z_C - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_B)$, donc la rotation de centre B et d'angle $-\pi/3$ transforme E en C; le triangle BCE est équilatéral direct.

Exercice 3.

$A(i/2)$, pour tout M différent de A, $F(M(z)) = M'(z')$ tel que $2zz' = i(z + z')$.
1. I(1), J(i), K=m[IJ]

a) $z_K = \dfrac{1}{2}(1 + i)$.

b) $2z_I' = i(1 + z_I') \Leftrightarrow z_I'(2 - i) = i \Leftrightarrow z_I' = \dfrac{i}{2 - i} \Leftrightarrow z_I' = \dfrac{1}{5}(-1 + 2i)$.

$2z'_J i = i(i + z'_J) \Leftrightarrow z'_J = i$.

$z'_K(1+i) = i\left(\frac{1+i}{2} + z'_K\right) \Leftrightarrow z'_K(1+i) = \frac{i-1}{2} + iz'_K \Leftrightarrow z'_K = \frac{i-1}{2}$.

c) K' n'est pas le milieu de [I'J'], donc F ne conserve pas les milieux.

2. Pour tout $z \neq i/2$, $z' = \frac{iz}{2z-i}$.

Pour tout $M \neq A$, on a :

$F(M) = M$

$\Leftrightarrow z = \frac{iz}{2z-i}$

$\Leftrightarrow 2z^2 = 2iz$

$\Leftrightarrow z(z-i) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = i$

Les points invariants sont O et J.

3. Pour tout $M \neq A$, on a :

$F(M) = M'$

$\Leftrightarrow 2zz' = i(z + z')$

$\Leftrightarrow zz' - \frac{i}{2}(z + z') = 0$

$\Leftrightarrow (z' - i/2)(z - i/2) + \frac{1}{4} = 0$

4. Pour tout point M, on a :

$M \in C(A(i/2),1)$

$\Leftrightarrow z - i/2 = e^{i\theta}, \qquad \theta \in [0, 2\pi[$

$\Leftrightarrow (z' - i/2)e^{i\theta} = -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow z' - i/2 = -\frac{1}{4}e^{-i\theta} = \frac{1}{4}e^{i(\pi-\theta)}$

Si M décrit le cercle de centre A et de rayon 1, alors M' décrit le cercle de centre A et de rayon $1/4$.