## Exercice 1

$\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe $-1$.
Soit $F$ l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. **a.** Soit E le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ ; on appelle $E'$ son image par $F$. Déterminer l'affixe de $E'$ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

   **b.** On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application $F$.

2. **a.** Soit K le point d'affixe $2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et $K'$ l'image de K par $F$.
   Calculer l'affixe de $K'$.

   **b.** Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application $F$.

3. On désigne par $R$ un point d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in ]-\pi\,;\,\pi[$. $R$ appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

   **a.** Montrer que $z'+1 = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$.
   En déduire que : $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$.

   **b.** Si on considère maintenant les points d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in ]-\pi\,;\,\pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **a.**.

## Exercice 2

**I. Restitution organisée de connaissances**

1. Démontrer qu' un nombre complexe $z$ est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe $z$ est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe $z$, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respective $a,\ b,\ c$, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a+b+c$.

**II. Étude d'un cas particulier**
On pose : $a = 3+\text{i}$, $b = -1+3\text{i}$, $c = -\sqrt{5}-\text{i}\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Placer les points A, B, C et le point H d'aflixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

**III. Étude du cas général.**
ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et $a,\ b,\ c$ sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :
$$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}.$$

1. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

   **a.** En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que $w$ est imaginaire pur.

   **b.** Verifier l'égalité : $(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.

   **c.** En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

2. Soit H le point d'affixe $a+b+c$.

   **a.** Exprimer en fonction de $a,\ b$ et $c$ les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AH}}$ et $\overrightarrow{\text{CB}}$.

   **b.** Prouver que $\left(\overrightarrow{\text{CB}}, \overrightarrow{\text{AH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où $k$ est un entier relatif quelconque.
   (On admet de même que $\left(\overrightarrow{\text{CA}}, \overrightarrow{\text{BH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

   **c.** Que représente le point H pour le triangle ABC ?