Exercice 1

1. a. $E\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$, $z_{E'} = -\dfrac{1}{\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}} = -\dfrac{1}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = -e^{i\frac{\pi}{3}} = -z_E$.

b. $M(z) \in C_1 \Leftrightarrow z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi[$. Si $z = e^{i\theta}$, alors $z' = -\dfrac{1}{e^{-i\theta}} = -e^{i\theta} = -z$.

M et M' sont symétriques par rapport à O.
L'image de C_1 par F est C_1.

2. a. $K\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$, $z_{K'} = -\dfrac{1}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = -\dfrac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} = \dfrac{1}{4}(\sqrt{3} - i)$.

b. $M(z) \in C_2 \Leftrightarrow z = 2e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi[$. Si $z = 2e^{i\theta}$, alors $z' = -\dfrac{1}{2e^{-i\theta}} = -\dfrac{1}{2}e^{i\theta}$.

Si M décrit C_2, alors M' décrit le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

3. $R(1 + e^{i\theta}), \theta \in]-\pi, \pi[$.

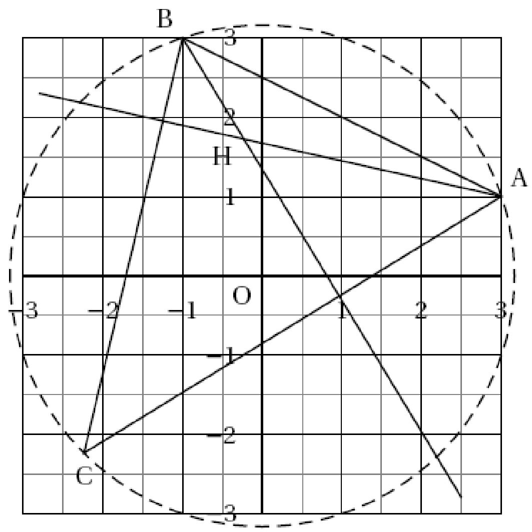
a. $z' + 1 = -\dfrac{1}{\bar{z}} + 1 = \dfrac{\bar{z} - 1}{\bar{z}}$. Si $z = 1 + e^{i\theta}$, $|z - 1| = 1$, donc $|\bar{z} - 1| = 1$; d'où

$|z' + 1| = \dfrac{|\bar{z} - 1|}{|\bar{z}|} = \dfrac{1}{|\bar{z}|} = |z'|$.

b. B(-1). $|z' + 1| = |z'|$, d'où $BR' = OR'$, donc R' appartient à la médiatrice de $[OB]$

Exercice 2

I. Restitution de connaissances
II. Etude d'un cas particulier
1. $OA = OB = OC = \sqrt{10}$, donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. H a pour affixe $h = 2 - \sqrt{5} + i(4 - \sqrt{5})$



III. Etude du cas général
ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit.

1. $OA = OB = OC \Leftrightarrow a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$.

2. $w = \bar{b}c - b\bar{c}$

a. $\bar{w} = \overline{\bar{b}c - b\bar{c}} = b\bar{c} - \bar{b}c = -w$, donc $w \in i\mathbb{R}$.

b. $(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = b\bar{b} + c\bar{b} - c\bar{c} - b\bar{c} = c\bar{b} - b\bar{c} = w$ et $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{(b+c)(\bar{b}-\bar{c})}{(b-c)(\bar{b}-\bar{c})} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.

c. Il s'ensuit que $\dfrac{b+c}{b-c} \in i\mathbb{R}$.

3. H est le point d'affixe a + b + c.

a. $\overrightarrow{AH}(b+c)$, $\overrightarrow{BC}(b-c)$.

b. Si b = -c, le triangle est rectangle en A, sinon $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \arg\left(\dfrac{b+c}{b-c}\right)[2\pi] = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Dans tous les cas, H est sur la hauteur issue de A.
On montre de même H est sur la hauteur issue de B.
c. Donc H est l'orthocentre du triangle ABC.