**Partie I**

1. Pour $x > -1$, soit $h(x) = \ln(1+x) - x$, $h'(x) = -\dfrac{x}{x+1}$ , donc h strictement croissante sur $]-1,0]$ et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ . Or h(0) = 0, donc, pour tout $x > -1$, $h(x) \leq 0$, soit $\ln(1+x) \leq x$.

2. Soit $n \geq 1$, posons $x = \dfrac{1}{n}$, alors, d'après 1, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$, soit $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$, d'où $\ln(n+1) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$.

De même, pour tout $n \geq 2$, posons $x = -\dfrac{1}{n}$, alors $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \leq -\dfrac{1}{n}$, soit $\ln(n-1) - \ln n \leq -\dfrac{1}{n}$, d'où

$\dfrac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n-1)$ .

3. Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Soit $n \geq 2$, en utilisant la question 2, on a :

$$\ln 2 - \ln 1 \leq \frac{1}{1} \leq 1$$

$$\ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2} \leq \ln 2 - \ln 1$$

$$\ln 4 - \ln 3 \leq \frac{1}{3} \leq \ln 3 - \ln 2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n-1)$$

Par sommation, on obtient, pour tout $n \geq 2$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1$. La double inégalité est encore valable pour n = 1.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, d'où, par un théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

4. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = H_n - \ln(n+1)$.

Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geq 0$, d'après 2.

La suite $(u_n)$ est croissante.

Pour tout $n \geq 1$, $u_n = H_n - \ln(n+1) \leq \ln n + 1 - \ln(n+1)$, d'après 3.

Or $\ln n \leq \ln(n+1)$, donc, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 1$.

La suite $(u_n)$ est croissante et majorée, donc elle est convergente.

$\gamma = \lim u_n$, $\gamma = 0,57721566490153286...$, ce nombre est appelé la constante d'Euler.

**Partie II**

1. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Pour tout $n \geq 1$, $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$. La suite $(S_{2n})$ est strictement croissante.

Pour tout $n \geq 1$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} < 0$. La suite $(S_{2n+1})$ est strictement décroissante.

Pour tout $n \geq 1$, $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}$. $\lim(S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$

Les suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont donc adjacentes. On note $L = \lim S_{2n}$.

2. $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite L, donc $(S_n)$ converge vers L.

3. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

$S_2 = 1 - \frac{1}{2}$ et $H_2 - H_1 = \frac{1}{2}$. La propriété est vraie pour n = 1.

Supposons la propriété vraie pour $n \geq 1$ quelconque, alors :

$$\begin{aligned}
H_{2n+2} - H_{n+1} &= H_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - H_n - \frac{1}{n+1} \\
&= H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= S_{2n+2}
\end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire. Par le principe de récurrence, pour tout $n \geq 1$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

4. On a, pour tout $n \geq 1$,

$$S_{2n} = H_{2n} - H_n = u_{2n} + \ln(2n+1) - u_n - \ln(n+1) = u_{2n} - u_n + \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right).$$

$\lim u_n = \lim u_{2n} = \gamma$.

$\lim\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{2n}{n}\right) = 2$ et $\lim_{X \to 2} \ln X = \ln 2$, d'où, par composition, $\lim \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln 2$.

Il s'ensuit que $\lim S_{2n} = \ln 2$. Donc $L = \ln 2$.