1. Les entiers inférieurs à 50 qui sont sommes de deux carrés sont les suivants: 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50.

2. Soit $n = a^2 + b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

Si a et b sont de même parité, alors n est pair.

Si a et b sont de parités contraires, alors n est un entier de la forme $4k + 1$.

On en déduit que les entiers de la forme $4k + 3$ ne sont pas sommes de deux carrés.

3. $21 (=4 \cdot 5 + 1)$ n'est pas somme de deux carrés.

On admet que tous les nombres premiers de la forme $4k + 1$ sont sommes de deux carrés.

Pour une démonstration de ce résultat voir concours général 2004 partie V.

4. On a :

$$\begin{aligned}2009 &= 7^2 \times 41 \\ &= 7^2 \times (25 + 16) \\ &= 7^2 \times (5^2 + 4^2) \\ &= (7 \times 5)^2 + (7 \times 4)^2 \\ &= 35^2 + 28^2\end{aligned}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 &= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)\end{aligned}$$

Il s'ensuit que le produit de deux nombres qui sont sommes de deux carrés est encore une somme de deux carrés.

6. Si $N = a^2 + b^2$, alors :

$$\begin{aligned}2N &= 2(a^2 + b^2) \\ &= (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \\ &= (a + b)^2 + (a - b)^2, \text{ d'après 5.}\end{aligned}$$

Donc si N est somme de deux carrés, alors $2N$ l'est aussi.

7. On a :

$$\begin{aligned}2005 &= 5 \times 401 \\ &= (2^2 + 1^2)(20^2 + 1^2) \\ &= 41^2 + 18^2 = 39^2 + 22^2, \text{ d'après 5.}\end{aligned}$$

8. On a, en utilisant 5 et 7 :

$$\begin{aligned}2005^2 &= (41^2 + 18^2)(41^2 + 18^2) \\ &= 1357^2 + 1476^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2005^2 &= (39^2 + 22^2)(39^2 + 22^2) \\ &= 1037^2 + 1716^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2005^2 &= (41^2 + 18^2)(39^2 + 22^2) \\ &= 1203^2 + 1604^2 = 1995^2 + 200^2\end{aligned}$$

9. Si p est pair, $p = 2k$, alors $2^p = 2^{2k} = (2^k)^2 + 0^2$.

Si p est impair, $p = 2k + 1$, alors $2^p = (2^k)^2 \times 2 = (2^k)^2 + (2^k)^2$.

Quel que soit l'entier p , 2^p est une somme de deux carrés.

Donc si $N = 2^p m$, où m est une somme de deux carrés, alors, d'après 5, N est une somme de deux carrés.

10. Supposons que la décomposition primaire de N soit $2^p p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots$, où les p_i sont les facteurs premiers de la forme $4k + 1$, et les q_j les facteurs premiers de la forme $4k + 3$.

Si tous les s_j sont pairs, alors $q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots$ est un carré.

Les p_i sont les facteurs premiers de la forme $4k + 1$, donc, d'après 3, ce sont des sommes de deux carrés.

D'après 5, il s'ensuit que $p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots$ est une somme de deux carrés.

On en déduit que $p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots$ est une somme de deux carrés.

On peut conclure, en utilisant 9, que $2^p p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots$ est une somme de deux carrés.

Un exemple :

$$\begin{aligned} 548817885 &= 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11^4 \times 17 \\ &= 5 \times 17 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^4 \\ &= (2^2 + 1)(4^2 + 1) \times 2541^2 \\ &= (7^2 + 6^2) \times 2541^2 \\ &= 17787^2 + 15246^2 \end{aligned}$$

Aucun des nombres ci-dessous n'est une somme de deux carrés.

$$2001 = 3 \times 23 \times 29$$

$$2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$$

$$2003 = 2003$$

$$2004 = 2^2 \times 3 \times 167$$

$$2006 = 2 \times 17 \times 59$$

$$2007 = 3^2 \times 223$$

$$2008 = 2^3 \times 251$$