Théorème de Lagrange : tout entier est la somme, au moins d'une façon, de 4 carrés d'entiers.

1. Tout entier n'est pas forcément la somme de 2 carrés. Montrons que les entiers de la forme 4n+3, où n est entier, ne peuvent être des sommes de 2 carrés.
Soit $N = a^2 + b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.
Si a et b sont de même parité, alors N est pair.
Si a et b sont de parités contraires, alors N est un entier de la forme 4n + 1.
On en déduit que les entiers de la forme 4n + 3 ne sont pas des sommes de deux carrés.

2. Ecrivons 3, 11 et 19 comme sommes de 3 carrés, puis 7 et 15 comme sommes de 4 carrés.
3 = 1 + 1 + 1; 11 = 1 + 1 + 3^2; 19 = 1 + 3^2 + 3^2; 7 = 1 + 1 + 1 + 2^2; 15 = 1 + 1 + 2^2 + 3^2.

3. Déterminons toutes les possibilités d'écrire 43 comme sommes de 4 carrés.
43 = 0 + 3^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 1 + 4^2 + 5^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2.
Dans les sommes proposées, on a toujours écrit les entiers dans l'ordre croissant.

4. On vérifie aisément, en développant, que : $(2p)^2 + (2q)^2 = (p-q)^2 + (p-q)^2 + (p+q)^2 + (p+q)^2$.
On peut en déduire une écriture de 1300 comme somme de 4 carrés.
1300 = 400 + 900 = 20^2 + 30^2 = (2*10)^2 + (2*15)^2 = 5^2 + 5^2 + 25^2 + 25^2.

5. On vérifie de même que : $(2p+1)^2 + (2q+1)^2 = (p-q)^2 + (p-q)^2 + (p+q+1)^2 + (p+q+1)^2$.
On en déduit une écriture de 1402 comme somme de 4 carrés.
1402 = 21^2+ 31^2 = (2*10 + 1)^2 + (2*15 + 1)^2 = 5^2 + 5^2 + 26^2 + 26^2

6. En utilisant l'identité $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$, et avec un peu de patience, on vérifie que :
$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2) = (ax-by-cz-dt)^2 + (bx+ay-dz+ct)^2$$
$$+(cx+dy+az-bt)^2 + (dx-cy+bz+at)^2.$$
Ce résultat montre comment, à partir de la décomposition de 2 entiers en sommes de 4 carrés, on peut avoir une décomposition du produit en somme de 4 carrés.

7. Décomposons 401 en somme de 4 carrés.
401 = 18^2 + 77 = 18^2 + 8^2 + 3^2 + 2^2.
On en déduit, en utilisant la question 6, que :
2005 = (0^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2 + 8^2 + 18^2) = 44^2 + 2^2 + 8^2 + 1^2.
Ou encore :
2005 = (2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2)(18^2 + 8^2 + 3^2 + 2^2) = 28^2 + 34^2 + 4^2 + 7^2.
2005 = (2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2)(8^2 + 3^2 + 18^2 + 2^2) = 13^2 + 14^2 + 34^2 + 22^2.
2005 = (1^2 + 0^2 + 0^2 + 2^2)(8^2 + 3^2 + 18^2 + 2^2) = 4^2 + 33^2 + 24^2 + 18^2.
2005 = (1^2 + 0^2 + 0^2 + 2^2)(8^2 + 18^2 + 3^2 + 2^2) = 4^2 + 12^2 + 39^2 + 18^2.

8. Décomposons $100651 = 401 \times 251$ en somme de 4 carrés.
251 = 15^2 + 5^2 + 1
100651 = (0^2 + 1^2 + 5^2 + 15^2)(18^2 + 8^2 + 3^2 + 2^2) = 53^2 + 17^2 +208^2 +233^2.

9. 2006 n'est pas la somme de 2 carrés. Décomposons 2006 en somme de 4 carrés.
2006 = 34*59 = (5^2 + 3^2 +0^2 + 0^2)(7^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2) = 26^2 + 36^2 + 5^2 + 3^2.