Le but du problème est de trouver toutes les fonctions f vérifiant :

$$\begin{cases} f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y) \end{cases} \qquad (1)$$

1. Quelles sont les fonctions constantes qui vérifient (1) ?

2. Montrer que les fonctions du type $x \mapsto e^{ax}$,où a est un réel, vérifient (1).

3. A partir de maintenant on suppose que f n'est pas la fonction nulle et que f vérifie (1).

a) Montrer que f ne s'annule pas (on pourra raisonner par l'absurde et montrer que si f s'annule, alors elle est nulle pour tout x).

b) Montrer que $f(0) = 1$ et que, pour tout x, $f(x) > 0$.

4. On pose $k = f'(0)$.

a) Soit a fixé, on pose, pour tout x, $g(x) = f(x+a) - f(a)f(x)$.

Calculer, pour tout x, $g'(x)$.

En déduire, en prenant x = 0, que, pour tout a, $f'(a) = kf(a)$.

5. On pose, pour tout x, $h(x) = f(x)e^{-kx}$

a) Calculer h(0).

b) Calculer, pour tout x, $h'(x)$.

c) En déduire que, pour tout x, $h(x) = 1$.

d) Conclure.