

Le but du problème est de trouver toutes les fonctions f vérifiant :

$$\begin{cases} f \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y) \end{cases} \quad (1)$$

1. Soit f une fonction constante égale à C qui vérifie (1). Alors, $f(0) = f(0)f(0)$, ce qui amène $C = C^2$, soit $C = 0$ ou $C = 1$. Les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$ vérifient bien (1).

2. La fonction $x \mapsto e^{ax}$, où a est un réel, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, $e^{a(x+y)} = e^{ax+ay} = e^{ax}e^{ay}$.

3. A partir de maintenant on suppose que f n'est pas la fonction nulle et que f vérifie (1).

a) Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$, alors, pour tout x ,

$f(x) = f((x-a)+a) = f(x-a)f(a) = f(x-a) \times 0 = 0$; donc f est la fonction nulle, ce qui est exclu. On en déduit que, pour tout x , $f(x) \neq 0$.

b) $f(0) = f(0)f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$, et d'après 3a, $f(0) = 1$.

Pour tout x , $f(x) = f(x/2 + x/2) = (f(x/2))^2 \geq 0$; or, pour tout y , $f(y) \neq 0$, donc, pour tout x , $f(x) > 0$.

4. On pose $k = f'(0)$.

a) Soit a fixé, on pose, pour tout x , $g(x) = f(x+a) - f(a)f(x)$.

f vérifie (1), donc, pour tout x , $g(x) = 0$.

Pour tout x , $g'(x) = f'(a+x) - f(a)f'(x) = 0$.

En prenant $x = 0$, il vient alors que, pour tout a , $f'(a) = f'(0)f(a) = kf(a)$.

5. On pose, pour tout x , $h(x) = f(x)e^{-kx}$

a) On a : $h(0) = f(0)e^0 = 1$.

b) Pour tout x , $h'(x) = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = kf(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = 0$.

c) D'après 5b, h est une fonction constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, de plus $h(0) = 1$, donc, pour tout x , $h(x) = 1$.

d) On en déduit que, pour tout x , $f(x)e^{-kx} = 1$, soit $f(x) = e^{kx}$. D'après 2, ces fonctions vérifient bien (1). Les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$, où $k \in \mathbb{R}$, sont les seules solutions de (1), hormis la fonction nulle.