Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que, pour tous x et y $\in I$, $xy \in I$.

Le but du problème est de trouver toutes les fonctions f vérifiant :

$$\begin{cases} f \text{ est définie et dérivable sur } I \\ \forall x, y \in I,\ f(xy) = f(x) + f(y) \end{cases} \quad (1)$$

1. Soit f une fonction constante égale à C qui vérifie (1). Alors, pour tout $x \in I$, $f(x^2) = f(x) + f(x)$, ce qui amène $C = C + C$, soit C = 0.

Donc la fonction nulle est la seule fonction constante qui vérifie (1).

2. $0 \in I$ et f vérifie (1). Alors, pour tout $x \in I$, $f(x \times 0) = f(x) + f(0)$, soit $f(0) = f(x) + f(0)$, d'où $f(x) = 0$. Il n'est donc pas très intéressant que 0 appartienne à I, car alors la fonction nulle sur I est la seule solution de (1).

3. Soit f qui vérifie (1) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf est définie et dérivable sur I, et, pour tous x et y $\in I$, $(\lambda f)(xy) = \lambda f(xy) = \lambda(f(x) + f(y)) = \lambda f(x) + \lambda f(y) = (\lambda f)(x) + (\lambda f)(y)$.

Donc λf vérifie (1).

A partir de maintenant $I =]0, +\infty[$.

4. La fonction ln est définie et dérivable sur I, et, pour tous x et y $\in I$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Donc la fonction $x \mapsto \ln x$ vérifie (1).

5. On a $f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$, soit $f(1) = f(1) + f(1)$, d'où $f(1) = 0$.

6. Soit $a \in I$, on pose, pour $x \in I$, $g(x) = f(ax) - f(x)$.
   a) Pour tout $x \in I$, $g(x) = f(ax) - f(x) = f(a) + f(x) - f(x) = f(a)$.
   b) Pour $x \in I$, $g'(x) = af'(ax) - f'(x)$, en utilisant la dérivée d'une composée.
   c) La fonction g est constante sur I, donc, pour $x \in I$, $g'(x) = af'(ax) - f'(x) = 0$.

7. En particulier pour x = 1, pour tout $a \in I$, $af'(a) = f'(1)$, soit encore $f'(a) = \dfrac{f'(1)}{a}$.

8. On pose, pour $a \in I$, $h(a) = f(a) - f'(1)\ln a$.
   a) On a : $h(1) = f(1) - f'(1)\ln 1 = 0$.
   b) Pour tout $a \in I$, $h'(a) = f'(a) - \dfrac{f'(1)}{a} = 0$.
   c) On en déduit que la fonction h est constante sur I, or h(1) = 0, donc, pour tout $a \in I$, $h(a) = f(a) - f'(1)\ln a = 0$. En posant k = f '(1), on a, pour tout $a \in I$, $f(a) = k\ln a$.

9. On a montré que la fonction ln vérifie (1), donc, d'après 3, les fonctions $k \times \ln$, où $k \in \mathbb{R}$, vérifient (1).

Conclusion : les fonctions f définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = k\ln x$, où $k \in \mathbb{R}$, sont les solutions de (1) si $I =]0, +\infty[$.