Exercice 1.

On cherche les nombres réels a strictement positifs et les fonctions f définies et continues sur l'intervalle $[a, +\infty[$, vérifiant, pour tout x supérieur ou égal à a, la relation $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t = 2\ln x$.

Démontrer que le problème posé a une et une seule solution, que l'on déterminera.

Exercice 2.

Dans une pièce à température constante de 20 °C, à l'instant initial, noté 0, la température $\theta(0)$ d'un liquide est égale à 70 °C.

Cinq minutes plus tard, elle est de 60 °C.

On admet que la température θ du liquide est une fonction dérivable du temps t, exprimé en minutes, et que $\theta'(t)$ est proportionnel à la différence entre la température $\theta(t)$ et celle de la pièce. On notera a le coefficient de proportionnalité, $a \in \mathbf{R}$.

1. **Démonstration de cours.**
   Soit (E) l'équation différentielle $z' = az$.
   Prérequis : la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation (E).
   Démontrer que toute solution de (E) est de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.
2. Résoudre l'équation différentielle : $y' = ay - 20a$.
3. Quelle sera la température du liquide 30 minutes après l'instant initial ?

Exercice 3.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. On suppose que $f(0) = 1$.

1. On suppose vérifiée, pour tout nombre réel x, la relation $f(x) + f'(x) \leqslant 0$.
   Comparer, pour $x \geqslant 0$, $f(x)$ et e^{-x}.
2. Soit a un réel positif. On suppose à présent que f vérifie la relation
   $$af(x) + f'(x) \leqslant 0.$$
   Que peut-on en déduire pour f ?
3. Dans un processus, une certaine quantité est mesurée par une fonction g du temps t, qui vérifie l'équation différentielle :
   $$g'(t) + 0{,}001g(t) + k(t)g^2(t) = 0$$
   où k est une fonction positive de t. Déterminer un instant t_0 tel que l'on puisse affirmer que, pour $t \geqslant t_0$ la valeur de $g(t)$ est inférieure ou égale à 5% de sa valeur initiale $g(0)$.