Partie A

a. Pour tout x, $f(x)=\frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2+e^{\frac{x}{4}}}=\frac{3e^{\frac{x}{4}}\times e^{-\frac{x}{4}}}{(2+e^{\frac{x}{4}})\times e^{-\frac{x}{4}}}=\frac{3}{1+2e^{-\frac{x}{4}}}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{4}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$, d'où, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x}{4}}=0$, de là $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{4}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$, d'où, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{x}{4}}=0$, de là $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$.

c. Pour tout x, $f'(x)=\frac{3}{2}\frac{e^{-x/4}}{(1+2e^{-x/4})^2}>0$; f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. g est solution sur $[0,+\infty[$ de l'ED : $y'=\frac{y}{4}$ (E_1).

a. La solution générale de (E_1) est définie sur $\mathbb{R}$ par $t\mapsto Ce^{t/4}$ où C est une constante réelle.

b. g est solution sur $\mathbb{R}^+$ de (E_1) et de plus $g(0)=1$, donc, pour tout $t\geq 0$, $g(t)=e^{t/4}$.

c. On cherche t tel que $g(t)>3$. Pour tout $t\geq 0$, on a :

$g(t)>3\Leftrightarrow e^{t/4}>3\Leftrightarrow\frac{t}{4}>\ln 3\Leftrightarrow t>4\ln 3\approx 4{,}39$

Après 5 ans, la population dépassera les 300 rongeurs.

2. u est solution sur $[0,+\infty[$ de l'ED : $\begin{cases}y'=\frac{y}{4}-\frac{y^2}{12} & (E_2).\\ y(0)=1\end{cases}$

a. On suppose que, pour tout positif, $u(t)>0$.

On pose, pour tout t positif, $h(t)=\frac{1}{u(t)}$.

Si $u(0)=1$, alors $h(0)=1$, et réciproquement.

On a les équivalences suivantes :

$$\forall t\in\mathbb{R}^+, u'(t)=\frac{u(t)}{4}-\frac{u^2(t)}{12}\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R}^+, -\frac{h'(t)}{h^2(t)}=\frac{1}{4h(t)}-\frac{1}{12h^2(t)}\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R}^+, h'(t)=-\frac{h(t)}{4}+\frac{1}{12}$$

Ainsi u est solution sur $[0,+\infty[$ de (E_2) si et seulement si h est solution sur $[0,+\infty[$ de

$\begin{cases}y'=-\frac{y}{4}+\frac{1}{12} & (E_3).\\ y(0)=1\end{cases}$

b. Soit l'ED $y'=-\frac{y}{4}+\frac{1}{12}$ (E).

$x\mapsto\frac{1}{3}$ est une solution particulière de (E). La solution générale de (E) est $x\mapsto\frac{1}{3}+Ce^{-t/4}$.

On en déduit que, pour tout $t\geq 0$, $h(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-t/4}$, puis $u(t)=\frac{3}{1+2e^{-t/4}}=f(t)$.

c. $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=3$. Le nombre de rongeurs tend vers 300.