1. a) Pour tout x > 0, $u(x) - u'(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2}e^x - \frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{x^2}$. Donc u est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'ED (E) : $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$.

b) On a :
v solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de (E)
$\Leftrightarrow \forall x > 0, v(x) - v'(x) = \frac{e^x}{x^2} = u(x) - u'(x)$
$\Leftrightarrow \forall x > 0, (v - u)(x) - (v - u)'(x) = 0$
$\Leftrightarrow v - u$ solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'ED $y - y' = 0$

c) La solution générale de l'ED $y - y' = 0$ est définie par $x \mapsto Ce^x$ où C est une constante réelle. D'après b), on en déduit que les solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ de (E) sont $v(x) = \frac{e^x}{x} + ke^x = \frac{kx+1}{x}e^x$ où k est une constante réelle.

2. $k \leq 0$, pour tout x > 0, $f_k(x) = \frac{kx+1}{x}e^x$.

a) Si k = 0, $\lim\limits_{x\to0^+} f_k(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (d'après les croissances comparées).
Si k < 0, $\lim\limits_{x\to0^+} f_k(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{kx+1}{x}e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{kx+1}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = -\infty$.

b) Pour tout x > 0, $f_k(x) = \left(k + \frac{1}{x}\right)e^x$, $f_k'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + k + \frac{1}{x}\right)e^x = \frac{e^x}{x^2}(kx^2 + x - 1)$.
Posons $g_k(x) = kx^2 + x - 1$.
Si k = 0, f_k' s'annule pour x = 1.
Si k < 0, $g_k'(x) = 2kx + 1$ et $g_k(-1/2k) = \frac{-k(1+4k)}{4k^2}$.

x	0		-1/2k		$+\infty$
$g_k'(x)$		-	0	+	
$g_k(x)$	-1	↗	$g_k(-1/2k)$	↘	$-\infty$

Au vu du tableau ci-dessus :
Si $k < -1/4$, $g_k(-1/2k) < 0$, f_k' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Si $k = -1/4$, $g_k(-1/2k) = 0$, f_k' s'annule pour x = -1/2k = 2.
Si $0 > k > -1/4$, $g_k(-1/2k) > 0$, f_k' s'annule pour 2 valeurs sur $\mathbb{R}^{+*}$ (corollaire du TVI).

3. En utilisant la question 2, il est aisé de voir que :

Courbe n°	1	2	3	4
Valeur de k	0	-0.15	-1	-0.25

4. $a > 0,\ A(a) = \int_a^{a+1} u(x)dx$.

a) Pour tout $x > 0,\ u(x) > 0$; A(a) est l'aire, en u.a., du domaine $\begin{cases} a \le x \le a+1 \\ 0 \le y \le u(x) \end{cases}$.

b) Soit F une primitive de u sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout $a > 0,\ A'(a) = F'(a+1) - F'(a) = u(a+1) - u(a) = \dfrac{e^{a+1}}{a+1} - \dfrac{e^a}{a} = \dfrac{e^a}{a(a+1)}(a(e-1)-1)$.

D'où le tableau de variations :

a	0		1/(e-1)		$+\infty$
A '(a)	‖	-	0	+	
A(a)	‖	↘		↗	

c) D'après la question précédente, l'aire est minimale si la bande est délimitée par les droites d'équations $x = \dfrac{1}{e-1}$ et $x = \dfrac{e}{e-1}$.