La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle I, et f' ne s'annule pas sur I.
T est la tangente à la courbe au point M d'abscisse x.

I. 1. Une équation de T est $Y = f'(x)(X-x)+f(x)$. On a :

$$f'(x)(X-x)+f(x)=0 \Leftrightarrow X-x=-\frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow X = x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

T coupe l'axe (Ox) en $H(X_T,0)$ où $X_T = x-\frac{f(x)}{f'(x)}$.

2. T coupe l'axe (Oy) en $K(0,Y_T)$ avec $Y_T = f'(x)(0-x)+f(x)=f(x)-xf'(x)$.

II. k est un réel fixé non nul.

1. On a :

f vérifie la propriété 1 sur I

$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x-X_T=k$

$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x-x+\frac{f(x)}{f'(x)}=k$

$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x)=\frac{1}{k}f(x)$

$\Leftrightarrow$ f solution sur I de l'ED $y'=\frac{1}{k}y$

2. On en déduit que les fonctions qui vérifient la propriété 1 sur I sont celles de la forme $x \to Ce^{\frac{x}{k}}$ où C est une constante réelle non nulle. Les fonctions trouvées sont définies dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$.

Pour $k=1/2$, celle qui vérifie $f(0)=1$ est $f(x)=e^{2x}$.

III. k est un réel fixé non nul. $I=\left]0,+\infty\right[$

1. On a :

f vérifie la propriété 2 sur I

$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f(x)-Y_T=k$

$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f(x)-f(x)+xf'(x)=k$

$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x)=\frac{k}{x}$

$\Leftrightarrow$ f solution sur I de l'ED $y'=\frac{k}{x}$

2. On en déduit que les fonctions qui vérifient la propriété 2 sur I sont celles de la forme $x \to k\ln x + C$ où C est une constante réelle.

Pour $k=1/2$, celle qui vérifie $f(1)=0$ est $f(x)=\frac{1}{2}\ln x$.

On remarquera que cette dernière fonction est la bijection réciproque de $x \to e^{2x}$.