Exercice 1

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

(1) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,

(2) $f'(0) = 1$,

(3) la fonction f ' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$.

   b) Calculer f(0).

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de f.

3. On pose : $u = f' + f$, $v = f' - f$.

   a) Calculer u(0) et v(0).

   b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

   c) En déduire les fonctions u et v.

   d) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Exercice 2

Une population évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années). A l'instant t = 0, l'effectif est de 1000 individus.

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante : Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$\text{(H)} \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\,;+\infty[$

$$f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

4. Quelle est l'évolution de cette population ?