Exercice 1

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

(1) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,

(2) $f'(0) = 1$,

(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[f'(x)]^2 = [f(x)]^2 + 1 > 0$, donc $f'(x) \neq 0$.

   b) D'après (1) et (2), $[f'(0)]^2 - [f(0)]^2 = 1$ et $f'(0) = 1$, donc f(0) = 0.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'(x) = 0$; or, d'après 1a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f(x)$.

3. On pose : $u = f' + f$, $v = f' - f$.

   a) $u(0) = f'(0) + f(0) = 1$ et $v(0) = f'(0) - f(0) = 1$.

   b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $u'(x) = f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) = u(x)$ et $v'(x) = f''(x) - f'(x) = f(x) - f'(x) = -v(x)$

   c) On en déduit, d'après 3a et 3b, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = e^x$ et $v(x) = e^{-x}$.

   d) Il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{u(x) - v(x)}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

   On vérifie que la fonction f ainsi trouvée possède bien les propriétés (1), (2) et (3).

Exercice 2

1. Soit f dérivable et strictement positif sur $\mathbb{R}^+$. On a :

f vérifie l'ED (E) sur $\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, f'(t) = -\dfrac{1}{20} f(t)(3 - \ln f(t))$ (en posant $g = \ln f$, on a $g' = \dfrac{f'}{f}$)

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, f(t)g'(t) = -\dfrac{1}{20} f(t)(3 - g(t))$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, g'(t) = -\dfrac{1}{20}(3 - g(t))$ (f(t)>0)

$\Leftrightarrow$ g vérifie l'ED (H) sur $\mathbb{R}^+$

2. Une solution particulière de (H) est $t \mapsto 3$. La solution générale de (H) est définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 3 + e^{\frac{t}{20}}$ où C est une constante réelle.

3. $f = \exp g$, donc, d'après 2, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) = \exp(3 + Ce^{\frac{t}{20}})$.
Or $f(0) = 1$, donc $C = -3$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) = \exp(3 - 3e^{\frac{t}{20}})$.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f'(t) = -3e^{\frac{t}{20}} \times f(t) < 0$. La fonction f est strictement décroissante et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.