

Exercice 1

- On vérifie facilement que : $A_1 = \frac{\sin x}{2}$, $A_2 = \frac{x}{2}$ et $A_3 = \frac{\tan x}{2}$.
- Or $A_1 \leq A_2 \leq A_3$, on en déduit que, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin x \leq x \leq \tan x$.
- Pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin x \leq x$, donc $\frac{\sin x}{x} \leq 1$; $0 < x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, donc $0 < \cos x \leq \frac{\sin x}{x}$; d'où $0 < \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$, on en déduit, par le théorème d'encadrement, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

- Pour tout $x \neq 0$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin X}{X} = 1$, d'où, par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = 1$, soit $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1}$. On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

- Pour tout x , $-x + 1 + \frac{x-2}{x^2+1} = \frac{-x^3 - x + x^2 + 1 + x - 2}{x^2 + 1} = \frac{-x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc la droite D d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à C au voisinage de $\pm\infty$.

- Pour tout x , $f(x) + x - 1 = \frac{x-2}{x^2+1}$.

Si $x > 2$, $f(x) + x - 1 > 0$, C est toujours strictement au-dessous de D .

Si $x < 2$, $f(x) + x - 1 < 0$, C est toujours strictement au-dessus de D .

C et D sont sécantes au point d'abscisse 2.

- f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition. Pour tout x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-3x^2 + 2x)(x^2 + 1) - 2x(-x^3 + x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x(-x^3 - 3x + 4)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x(x-1)(-x^2 - x - 4)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 + x + 4$ vaut -15 , donc, pour tout x , $x^2 + x + 4 > 0$.

$f'(x)$ est du signe de $-x(x-1)$.

- Tableau de variations.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$	-1	$-1/2$	$-\infty$

- $f'(2) = -\frac{4}{5}$ et $f(2) = -1$. Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2

est $y = -\frac{4}{5}(x-2) - 1$, soit $y = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$.

6. Courbe

