

Exercice 1

Soit $f(x) = 2x - \sin x$ et C sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variations de f .
2. Montrer que, pour tout x , $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$. En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer les points communs de C et $D_1: y = 2x - 1$, puis ceux communs à C et $D_2: y = 2x + 1$.
Préciser les tangentes en ces points.
4. Etudier la parité de f .
Montrer que, pour tout x , $f(x + 2\pi) = f(x) + 4\pi$.
Que peut-on en déduire pour la courbe ?
5. Avec un logiciel, tracer C sur $[-\pi, \pi]$, avec les droites D_1 et D_2 , ainsi que les tangentes aux points d'abscisses $-\pi$, 0 et π .

Exercice 2

1. Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = x \cos x - \sin x$.
Etudier g et dresser son tableau de variations.
En déduire le signe de g sur $[0, \pi]$.
2. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \in]0, \pi]$.
Justifier que f est continue sur $[0, \pi]$.
Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, \pi]$.
3. Dérivabilité en 0
 - a) On pose, pour $x \geq 0$, $\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$.
Calculer φ' , φ'' et φ''' . Résumer dans un tableau les variations de φ'' , φ' et φ .
 - b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$.
 - c) Prouver que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
4. Faire le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.