Exercice 1

Soit $f(x) = 2x - \sin x$ et C sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Pour tout x, $f'(x) = 2 - \cos x > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout x, $-1 \le \sin x \le 1$, donc, pour tout x, $2x - 1 \le f(x) \le 2x + 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty$, donc, par un théorème de comparaison,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3. Les abscisses des points communs de C et $D1 : y = 2x - 1$ vérifient $\sin x = 1$,

soit $x = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$; en ces points la dérivée vaut 2, la tangente est confondue avec D1.

Les abscisses des points communs à C et $D_2 : y = 2x + 1$ vérifient $\sin x = -1$,

soit $x = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$; en ces points la dérivée vaut aussi 2, la tangente est confondue avec D2.

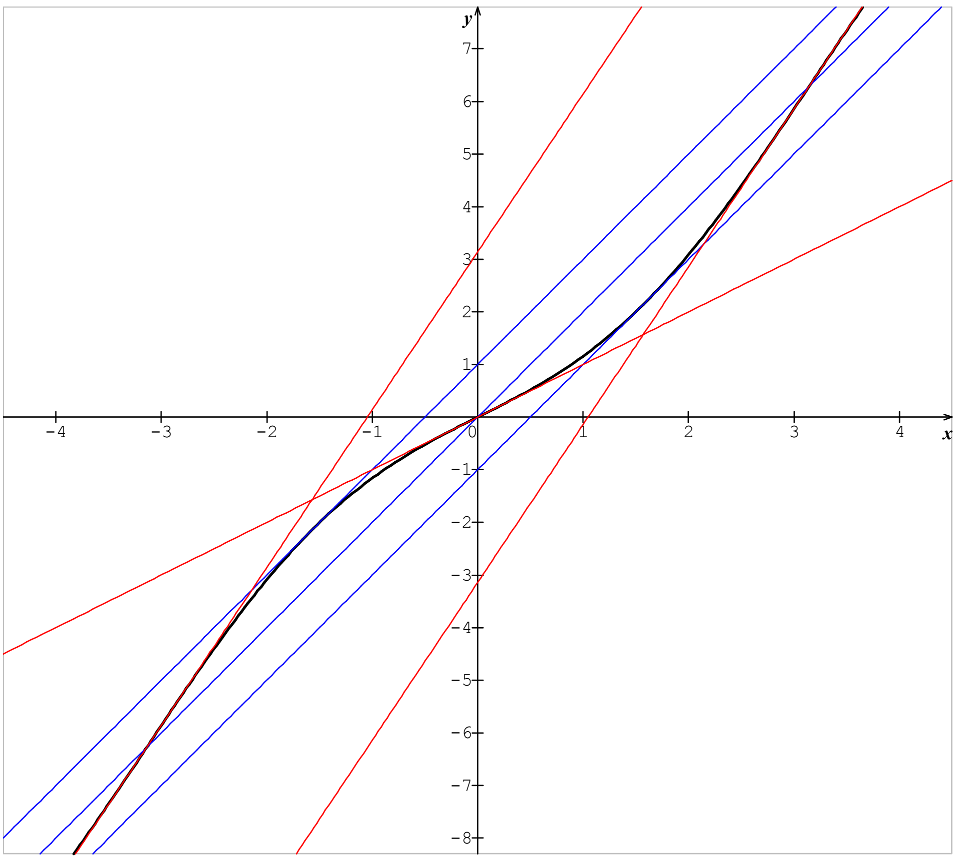
4. Pour tout x, $f(-x) = -2x - \sin(-x) = -2x + \sin x = -f(x)$. La fonction f est impaire.

Pour tout x, $f(x + 2\pi) = 2x + 4\pi - \sin(x + 2\pi) = 2x + 4\pi - \sin x = f(x) + 4\pi$.

Il suffit d'étudier la courbe sur $[0,\pi]$; par parité, on la connaîtra sur $[-\pi,\pi]$.

La courbe sur $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, sera obtenue à partir de celle sur $[-\pi,\pi]$ par une translation de vecteur $2k\pi\vec{i} + 4k\pi\vec{j}$.

5. Courbe



Exercice 2

1. Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $g(x) = x\cos x - \sin x$.

Pour tout $x \in [0,\pi]$, $g'(x) = -x\sin x$.

x	0		π
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$

$g(0) = 0$ et, pour tout $x \in]0,\pi]$, $g(x) < 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \in]0,\pi]$.

f est continue sur $]0,\pi]$ en tant que quotient de deux fonctions continues sur cet intervalle.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$, donc f est continue en 0.

Pour $x \in]0,\pi]$, $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2} < 0$.

3. Dérivabilité en 0

a) On pose, pour $x \geq 0$, $\varphi(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$.

Pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$, $\varphi''(x) = -\sin x + x$ et $\varphi'''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$.

x	0		$+\infty$
$\varphi''(x)$	0	$\nearrow$ $+$	
$\varphi'(x)$	0	$\nearrow$ $+$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$ $+$	

b) On en déduit que, pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) \geq 0$ et $\varphi''(x) \geq 0$, soit $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$.

c) Pour tout $x \in]0,\pi]$,

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \left|\frac{\sin x - x}{x^2}\right| = \frac{x - \sin x}{x^2} \leq \frac{x}{6}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4. Tableau de variations de f sur $[0,\pi]$.

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	$-1/\pi$
$f(x)$	1	$\searrow$	0