Inégalité arithmético-géométrique: preuve de Cauchy.

On trouvera une autre démonstration de cette propriété dans le cours sur les logarithmes.
On admettra provisoirement les propriétés sur les puissances fractionnaires.

La propriété: soient $a_1, a_2, ...a_n$ n réels strictement positifs, alors :

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}}$$

La moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique.

1. Démontrer la propriété dans le cas n = 2.
2. En utilisant 1, montrer que la propriété est vraie pour n = 4.

   (on écrira $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}\right)$)
3. Montrer que si la propriété est vraie pour n alors elle est aussi vraie pour 2n.

   (en s'inspirant de 2, on écrira $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2n}}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + ... + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + ... + a_{2n}}{n}\right)$)
4. En déduire que la propriété est vraie pour tout $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.
5. Le cas n = 3. Notons $A_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$. En utilisant $A_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + A_3}{4}$ et le fait que la propriété est vraie pour le cas n = 4, démontrer le cas n = 3.
6. En s'inspirant de 5, montrer que si la propriété est vraie pour n alors elle l'est aussi pour n-1.
7. Montrer que la propriété est vraie pour tout $n \geq 2$.

   (on utilisera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leq 2^p$)

Exemples

Soient $a_1, a_2, ...a_n$ n réels strictement positifs, montrer que :

a) $(a_1 + a_2 ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$.

b) $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$.

c) $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq (a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}}$. La moyenne harmonique est inférieure à la moyenne géométrique.