

Exercice 1

1. Soit A, B et C trois réels positifs, montrer que : $A + B \geq 2\sqrt{AB}$. En déduire que :

$$(A + B)(B + C)(C + A) \geq 8ABC.$$

2. Soit a, b et c trois réels positifs, l'objectif est de montrer que :

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc. \quad (1)$$

a) On note $A = a + b - c$, $B = b + c - a$ et $C = c + a - b$. Calculer $A + B$, $B + C$ et $C + A$.
En déduire que l'un au plus des trois nombres A, B et C est strictement négatif, et que dans ce cas l'inégalité (1) est triviale.

b) Démontrer l'inégalité (1) dans le cas où A, B et C sont positifs.

Exercice 2

Soit a, b et c trois réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$. L'objectif est de montrer que :

$$(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leq 1. \quad (1)$$

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

2. Avec les hypothèses du début, montrer que : $(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c}) = -b - \frac{1}{b} + \frac{a}{c} + 2$.

$$\text{En déduire que : } (a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c}) \leq \frac{a}{c}.$$

3. Montrer que forcément l'un des trois nombres du membre de gauche dans (1) est positif.
4. Donner un exemple où l'un des trois nombres est strictement négatif.
5. En supposant $a \geq 1$, et par discrimination des cas $b \geq 1$, $b < 1$ ($c \geq 1$ ou $c < 1$), montrer que l'un au plus des trois nombres est strictement négatif.
6. Démontrer l'inégalité (1).