A. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t-1)^n e^{-t} dt$.

1. Calculer u_1.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. En déduire par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + ... - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} + u_1$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq \frac{1}{n!}$. En déduire la limite de la suite (u_n).
5. En déduire que : $\frac{1}{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!})$.

B. On note, pour $n \geq 2$, $U_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}$, $v_n = n!U_n$.

1. Calculer v_2 et v_3.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $v_{n+1} = (n+1)v_n + (-1)^{n+1}$.
3. En déduire que, pour tout $n \geq 4$, $v_n = (n-1)(v_{n-1} + v_{n-2})$.

C. On part d'une situation où n personnes ($n \geq 2$) sont assises sur n chaises, on peut alors se demander de combien de manières il est possible de permuter ces personnes telles qu'aucune ne garde la même place. Le nombre de ces permutations, aussi appelées dérangements, est noté d(n).

1. Calculer d(2) et d(3).
2. On suppose dans cette question que $n \geq 4$.
   Soit i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n. Supposons que la personne P_i assise sur la chaise i choisit de s'asseoir sur la chaise j.
   a) Montrer que si la personne P_j décide de s'asseoir sur la chaise i, il y a d(n-2) possibilités.
   b) Montrer que si la personne P_j décide de s'asseoir sur une autre chaise, il y a d(n-1) possibilités.
   c) En déduire que, pour tout $n \geq 4$, $d(n) = (n-1)(d(n-1) + d(n-2))$.
3. En utilisant la partie B, montrer que, pour tout $n \geq 2$, $d(n) = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!})$.
4. Calculer d(10).
5. Justifier que, pour n assez grand, le rapport entre le nombre de dérangements et le nombre de permutations possibles est compris entre 0,36 et 0,37.
6. Autre exemple : 10 personnes déposent leur chapeau au vestiaire avant une réunion. A l'issue de celle-ci, survient une panne d'électricité et chaque personne prend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité que 3 personnes exactement retrouvent leur chapeau ?