Exercice 1. On définit la fonction f, de [0, 1] dans $\mathbb{R}$, par $f(x)=\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$, puis la fonction F, de $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$, par $F(x)=f(\sin x)$.

1. Pour tout x appartenant à [0, 1], $t\mapsto\sqrt{1-t^2}$ est continue sur l'intervalle [0, x], ce qui justifie l'existence de f(x). On sait alors, d'après le cours, que f est dérivable sur [0, 1] et que, pour tout $x\in[0,1]$, $f'(x)=\sqrt{1-x^2}$.

F est donc la composée de deux fonctions dérivables, il s'ensuit que F est dérivable sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ et que, pour tout $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, $F'(x)=f'(\sin x)\times\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}\times\cos x=\sqrt{\cos^2 x}\times\cos x=\cos^2 x$.

2. F(0) $=\int_0^0\sqrt{1-t^2}\,dt$ = 0. Pour tout $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, F'(x) = $\cos^2 x$.

$t\mapsto\cos^2 t$ est continue sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, donc $x\mapsto\int_0^x\cos^2 t\,dt$ est la primitive sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ de $t\mapsto\cos^2 t$ qui s'annule en 0. On en déduit que, pour tout x dans $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, $F(x)=\int_0^x\cos^2 t\ dt$.

3. On a : $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\ dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{1}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

On en déduit : $\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=f(1)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Une équation du cercle de centre O et de rayon 1 est : $x^2+y^2=1$, ce qui donne : $y^2=1-x^2$.

Il s'ensuit que $\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{4}\text{aire}(D)$, où D est le disque de centre O et de rayon 1.

Exercice 2. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$.

On sait déjà, d'après l'exercice précédent, que $I_0=\frac{\pi}{4}$.

1. Soit g la fonction définie sur [0, 1] par $g(x)=x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ et G la fonction définie sur [0, 1] par $G(x)=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$. On a G(1) = 0 et, pour tout $x\in[0,\ 1]$, G'(x) =g(x).

$I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=\left[G(x)\right]_0^1=\frac{1}{3}$.

2. Soit n strictement positif.

Les fonctions u et v, dérivables sur [0, 1], sont choisies telles que :

$u(x)=x^n$ u'(x) = nx^{n-1}

$v'(x)=x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ v(x) = $-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}$

u, u', v et v' sont continues sur [0, 1], la formule d'intégration par parties donne :

$I_{n+1}=\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}x^n\right]_0^1+\frac{n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, soit :

$I_{n+1} = \frac{n}{3}\int_0^1 (x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - x^{n+1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}})dx = \frac{n}{3}(I_{n-1} - I_{n+1}).$

On en déduit la relation : $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1}$.

3. On a : $I_0 = \frac{\pi}{4}, I_2 = \frac{\pi}{16}, I_4 = \frac{\pi}{32}, I_1 = \frac{1}{3}, I_3 = \frac{2}{15}, I_5 = \frac{8}{105}$.

Exercice 3. 1. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Soit k une entier ≥ 1.

Il s'ensuit que, pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.

En intégrant dans le sens croissant de k à k+1, on a : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$.

Soit n un entier ≥ 2, on a :

$f(2) \leq \int_1^2 f(t)dt \leq f(1)$

$f(3) \leq \int_2^3 f(t)dt \leq f(2)$

.

.

$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t)dt \leq f(n-1)$

En additionnant et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{t}dt \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}$.

Or $\int_1^n \frac{1}{t}dt = [\ln t]_1^n = \ln n$, d'où le résultat.

2. a) Pour tout $n \geq 2$, $\ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}$, donc $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

On en déduit : $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = u_n \leq 1 + \ln n$.

b) $\lim \ln(n+1) = +\infty$; or $\ln(n+1) \leq u_n$, donc, par un théorème de comparaison, on en déduit que $\lim u_n = +\infty$.

3. Pour tout $n \geq 2$, $v_n = u_n - \ln n$. On a : $\ln n < \ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln n$. Donc $0 < v_n \leq 1$.

4. a) On sait déjà que $\int_n^{n+1} f(t)dt \geq f(n+1)$, soit $\ln(n+1) - \ln n \geq \frac{1}{n+1}$.

b) Pour tout $n \geq 2$, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leq 0$, d'après a.

Donc la suite (v_n) est décroissante.

5. La suite (v_n) est décroissante et positive, donc elle converge.

$\lim v_n = \gamma$, la constante d'Euler.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon(n)$ où $\lim \varepsilon(n) = 0$.