

Exercice 1

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}, \text{ et l'intégrale } I_n = \int_1^e f_n(x) dx.$$

1. On pose $F(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. Pour tout $x > 0$, $F'(x) = \frac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$.

On en déduit que $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = [-F(x)]_1^e = F(1) - F(e) = 1 - \frac{2}{e}$.

2. Pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx$.

Les fonctions u et v , dérivables sur $[1, e]$, sont choisies telles que :

$$u(x) = (\ln x)^{n+1} \quad u'(x) = (n+1) \frac{(\ln x)^n}{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} \quad v(x) = -\frac{1}{x}$$

u , u' , v et v' sont continues sur $[1, e]$, la formule d'intégration par parties donne :

$$I_{n+1} = \left[-\frac{(\ln x)^{n+1}}{x} \right]_1^e + (n+1) \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$

3. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul,

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right).$$

Pour $n = 1$, $I_1 = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} \right)$, la propriété est vérifiée.

Supposons la propriété vérifiée pour $n \geq 1$ quelconque, alors

$$\frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{e} + (n+1)I_n \right) = -\frac{1}{(n+1)!e} + \frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \right).$$

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

4. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $[1, e]$, donc, pour tout $x \in [1, e]$ et tout $n \geq 1$, on a successivement :

$$0 \leq \ln x \leq 1$$

$$0 \leq (\ln x)^n \leq 1 \quad \text{car } X \rightarrow X^n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{car } x^2 > 0$$

D'où, en intégrant dans le sens croissant de 1 à e , on obtient :

$$0 \leq I_n \leq \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e = 1 - \frac{1}{e} \leq 1.$$

5. Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \frac{I_n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$, or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$, donc, par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right) = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

1. $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

2. a) Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$, $1 - x^n - \frac{1}{1+x^n} = \frac{1-x^{2n}-1}{1+x^n} = \frac{-x^{2n}}{1+x^n} \leq 0$ et

$$1 - \frac{1}{1+x^n} = \frac{x^n}{1+x^n} \geq 0, \text{ donc } 1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

b) Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$, $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$, d'où, en intégrant dans la sens croissant de

0 à 1, on obtient : $\int_0^1 (1-x^n) dx \leq u_n \leq \int_0^1 1 dx$, soit $\left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq u_n \leq 1$, d'où $1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1$.

c) Par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $v_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$.

3. a) Pour tout $n \geq 1$, $v_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$.

Les fonctions f et g , dérivables sur $[0, 1]$, sont choisies telles que :

$$f(x) = x$$

$$f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$$

$$g(x) = \ln(1+x^n)$$

f, f', g et g' sont continues sur $[0, 1]$, la formule d'intégration par parties donne :

$$v_n = \left[x \ln(1+x^n) \right]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx.$$

b) Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$, $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$, d'où, en intégrant dans la sens croissant de

0 à 1, on obtient : $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

c) Par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2$.

4. a) Pour tout $n \geq 1$, $v_n + nu_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx + n \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = n \int_0^1 1 dx = n$.

b) Il s'ensuit que, pour tout $n \geq 1$, $n(1-u_n) = v_n$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1-u_n) = \ln 2$.