

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I = \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ (pour tout $x \in I$, $f_0(x) = e^{-x}$).

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n(a) = \int_0^a f_n(x) dx$.

$$1. I_0(a) = \int_0^a f_0(x) dx = \int_0^a e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^a = 1 - e^{-a}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in I$, on a :

$$f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} = f_{n-1}(x) - f_n(x).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^a f_n'(x) dx = \int_0^a (f_{n-1}(x) - f_n(x)) dx$, d'où, par linéarité,

$$I_{n-1} - I_n = \left[f_n(x) \right]_0^a = f_n(a) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}.$$

$$3. \text{ Montrons par récurrence que, pour tout } n \in \mathbb{N}, I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a}.$$

La propriété est vraie pour $n = 0$, en effet, d'après la question 1, $I_0(a) = 1 - e^{-a} = 1 - \left(\sum_{k=0}^0 \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a}$.

Supposons la propriété vraie pour n quelconque, alors

$$\begin{aligned} I_{n+1}(a) &= I_n(a) - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^{-a} \quad \text{d'après la question 2} \\ &= 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a} - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^{-a} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 1 - \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a} \end{aligned}$$

D'où l'hérédité. Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a}$.

$$4. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) e^{-1} = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

a) Pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \geq 0$, d'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient $u_n \geq 0$.

u_n est l'aire, en unités d'aire, entre la courbe de f_n , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a successivement :

$$0 \leq e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^0 \quad \text{car } x \mapsto e^{-x} \text{ est une fonction décroissante}$$

$$0 \leq \frac{x^n}{n!} e^{-x} \leq \frac{x^n}{n!} \quad \text{car } \frac{x^n}{n!} \geq 0$$

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$, d'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à

$$1, \text{ on obtient : } 0 \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$, donc, par le théorème d'encadrement, $\lim u_n = 0$.

$$d) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, eu_n = e - \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right), \text{ or } \lim u_n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) = e.$$