Où l'on montre que : $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^{k+1}}{k}+....=\ln 2$.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt$

1. a. $I_1=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt=\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$.

b. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt+\int_0^1\frac{t^{n+2}}{1+t^2}dt=\int_0^1\frac{t^n(1+t^2)}{1+t^2}dt=\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

c. $I_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$, $I_5=\frac{1}{4}-I_3=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$,

$I_7=\frac{1}{6}-I_5=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\ln 2$

2. a. Pour tout t, $(1-t)^2\ge 0$, soit $2t\le 1+t^2$, d'où $\frac{t}{1+t^2}\le\frac{1}{2}$.

b. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $t\in[0,1]$, on a successivement :

$0\le t^2\le 1$

$1\le 1+t^2\le 2$

$\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+t^2}\le 1$

$\frac{t^n}{2}\le\frac{t^n}{1+t^2}=t^{n-1}\frac{t}{1+t^2}\le\frac{t^{n-1}}{2}$ car $t^n\ge 0$, $t^{n-1}\ge 0$ et $\frac{t}{1+t^2}\le\frac{1}{2}$

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $t\in[0,1]$, $\frac{t^n}{2}\le\frac{t^n}{1+t^2}\le\frac{t^{n-1}}{2}$, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient : $\int_0^1\frac{t^n}{2}dt\le I_n\le\int_0^1\frac{t^{n-1}}{2}dt$, soit $\frac{1}{2n+2}\le I_n\le\frac{1}{2n}$.

d. $\lim\frac{1}{2n+2}=\lim\frac{1}{2n}=0$, d'où, par le théorème d'encadrement, $\lim I_n=0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2+\frac{2}{n}}\le nI_n\le\frac{1}{2}$, on en déduit que $\lim nI_n=\frac{1}{2}$.

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. $u_1=1$, $u_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

b. Démontrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n+2(-1)^nI_{2n+1}=\ln 2$.

La propriété est vraie pour n = 1, en effet, $u_1-2I_3=1-1+\ln 2=\ln 2$.

Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$ quelconque, alors

$$u_{n+1}+2(-1)^{n+1}I_{2n+3}=u_n+\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}+2(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+2}-I_{2n+1}\right)=u_n+2(-1)^nI_{2n+1}=\ln 2.$$

Donc la propriété est héréditaire. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

c. $\left|(-1)^nI_{2n+1}\right|=I_{2n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty}I_{2n+1}=0$, donc $\lim(-1)^nI_{2n+1}=0$, d'où $\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln 2$.