Exercice 1.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$. On suppose qu'il existe un réel M tel que, pour tout x de $[a,b]$, $|f'(x)| \le M$. On note $I = \int_a^b f(t)dt$, $h = \frac{b-a}{n}$, pour i = 0..n, $x_i = a + ih$, et $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i)$. Le but de l'exercice est de montrer que $\lim I_n = I$.

1. On rappelle l'inégalité de la moyenne : a et b sont deux éléments de l'intervalle I et g est une fonction continue sur I; si, pour tout x de I, $|g(x)| \le M$, alors $\left|\int_a^b g(t)dt\right| \le M|b-a|$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $[a,b]$, donc f ' est continue sur $[a,b]$; et, pour tout x de $[a,b]$, $|f'(x)| \le M$. Il découle de l'inégalité de la moyenne que, pour tous u et v de $[a,b]$, on a $\left|\int_u^v f'(t)dt\right| \le M|u-v|$, soit $|f(u)-f(v)| \le M|u-v|$.

2. On a :

$$|I - I_n| = \left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i)\right|$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dt\right)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(t)-f(x_i))dt\right)\right|$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(t)-f(x_i))dt\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t)-f(x_i)|dt$$

3. On en déduit, d'après la question 1, on en déduit :

$$|I - I_n| \le \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t)-f(x_i)|dt \le \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} M|t-x_i|dt$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} M(t-x_i)dt = \sum_{i=0}^{n-1}\left[M\frac{(t-x_i)^2}{2}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} M\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}nM\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

4. On en déduit, par le théorème d'encadrement, que : $\lim I_n = I$.

Exercice 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$ et $b_n = a_n - \frac{1}{n}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0$.

Donc la suite (a_n) est strictement décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2}$.

La suite (a_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

3. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2n}$.

$b_1 = a_1 - 1 = 1 - \frac{1}{2}$. Si, pour n quelconque non nul, $b_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2n}$, alors

$$b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{n+1} = a_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = b_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Donc la propriété est héréditaire. CQFD

4. La fonction $f : x \mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Il s'ensuit que, pour tout $t \in [p, p+1]$, $p \in \mathbb{N}^*$, $f(p+1) \le f(t) \le f(p)$.

En intégrant dans le sens croissant de p à p+1, on a : $f(p+1) \le \int_p^{p+1} f(t)dt \le f(p)$, soit

$$\frac{1}{p+1} \le \int_p^{p+1} \frac{1}{t}dt \le \frac{1}{p}.$$

5. On a :

$$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(t)dt \le f(n)$$

$$f(n+2) \le \int_{n+1}^{n+2} f(t)dt \le f(n+1)$$

.

.

$$f(2n) \le \int_{2n-1}^{2n} f(t)dt \le f(2n-1)$$

En additionnant et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \le \int_n^{2n} f(t)dt \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n-1}.$$

Ce qui donne : $a_n - \frac{1}{n} \le \ln 2 \le a_n - \frac{1}{2n}$.

6. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln 2 + \frac{1}{2n} \le a_n \le \ln 2 + \frac{1}{n}$

Ce qui amène, par le théorème d'encadrement, $\lim a_n = \ln 2$.

Or , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = a_n - \frac{1}{n}$, donc $\lim a_n = \lim b_n = \ln 2$.

De là, par la question 3, $\lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2n}) = \ln 2$.