

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1. Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$. Donc f est strictement croissante sur $]0, e^2]$ et strictement décroissante sur $[e^2, +\infty[$.

2. a) Pour tout $k \geq 8$, $[k, k+1] \subset [e^2, +\infty[$, donc f est décroissante sur $[k, k+1]$.

Il s'ensuit que, pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.

En intégrant dans le sens croissant de k à $k+1$, on a : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$.

b) On a :

$$f(9) \leq \int_8^9 f(t)dt \leq f(8)$$

$$f(10) \leq \int_9^{10} f(t)dt \leq f(9)$$

.

.

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$$

En additionnant et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$u_{n+1} - f(8) \leq \int_8^{n+1} f(t)dt \leq u_n.$$

c) Soit $I_n = \int_8^{n+1} f(t)dt$.

Les fonctions u et v , dérivables sur $[8, n+1]$, sont choisies telles que :

$$u(t) = \ln t \quad u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad v(t) = 2\sqrt{t}$$

u , u' , v et v' sont continues sur $[8, n+1]$, la formule d'intégration par parties donne :

$$I_n = \left[2\sqrt{t} \ln t \right]_8^{n+1} - \int_8^{n+1} \frac{2}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t} \ln t - 4\sqrt{t} \right]_8^{n+1} = 2\sqrt{n+1}(\ln(n+1) - 2) - 4\sqrt{2}(\ln 8 - 2).$$

d) Il est clair que $\lim I_n = +\infty$; or, d'après b, $I_n \leq u_n$, on en déduit, par un théorème de comparaison, que $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 2

La suite (u_n) définie pour tout entier n par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{et, pour } n \geq 1, \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$1. \quad a) \quad \text{Pour tout } x \in [0, 1], \quad f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{Il s'ensuit que } u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$b) \quad u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

2. a) Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \geq 1$, on a successivement :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n, \quad \text{car } x^n \geq 0$$

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

D'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

b) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a successivement :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x^2 \leq 1 \quad \text{car } t \rightarrow t^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$1 \leq 1+x^2 \leq 2$$

$$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}, \quad \text{car } t \rightarrow \sqrt{t} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$, d'où $\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$.

En intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}} dx \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx, \text{ soit } \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \quad (1).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ donc, par le théorème d'encadrement, } \lim u_n = 0.$$

$$3. \text{ Pour tout entier } n \geq 3, I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx.$$

a) Pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$u_n + u_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx = I_n.$$

Les fonctions u et v , dérivables sur $[0, 1]$, sont choisies telles que :

$$u(x) = \sqrt{1+x^2} \quad u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$v'(x) = x^{n-2} \quad v(x) = \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

u, u', v et v' sont continues sur $[0, 1]$, la formule d'intégration par parties donne :

$$I_n = \left[\frac{x^{n-1}}{n-1} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{(n-1)\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{n-1} (\sqrt{2} - u_n).$$

Sachant que $u_n + u_{n-2} = I_n$, on en déduit que $(n-1)(u_{n-2} + u_n) = \sqrt{2} - u_n$, soit $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.

b) La suite (u_n) est décroissante, donc, pour tout entier $n \geq 3$, $u_n \leq u_{n-2}$, d'où $nu_n + (n-1)u_n \leq nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$, soit $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$. (2)

c) A l'aide des inégalités (1) et (2), pour tout $n \geq 3$, $\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nu_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{2n-1}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{2}}{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ donc, par le théorème d'encadrement, } \lim nu_n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$