

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{pour } x > 0 \quad \text{et } f(0) = 0.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique 5 cm).

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à (C).

2. Pour $x > 0$, calculer $\frac{f(x) - f(0)}{x}$.

Etudier la limite de cette expression quand x tend vers 0 (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^n e^{-u} = 0$).

Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

3. Démontrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$.

4. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f .

5. Tracer la courbe.

Exercice 2

A. Soit la fonction définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe.

Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

En déduire le tableau de variations de la fonction f .

2. Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α , appartient à $[-0,72; -0,71]$.

3. Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $] -1; +\infty[$.

B. Soit g la fonction définie sur l'ensemble $] -1; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}.$$

1. Etude de g aux bornes de son ensemble de définition

a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. Variations de g

a) Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.

b) Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$.

En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$.

3. Tableau de variations et représentation graphique de g

a) Dresser le tableau de variations de la fonction g .

b) Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).