Exercice 1 Algorithme de calcul pour la fonction exponentielle.

On a la formule du cours : $\exp(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, mais la convergence est très lente.

Si x < 0, on utilise $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$.

Si x > 1, $x = E(x) + x'$ avec $x' \in [0;1[$, et $\exp(x) = \exp(E(x) + x') = e^{E(x)} \times \exp(x')$.

On suppose donc que $0 \le x \le 1$.

On connaît exp(0) = 1 et exp(1) = e. On sait aussi que $\exp\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{\exp(a) \times \exp(b)}$.

On pose c = (a + b)/2, alors $\exp(c) = \sqrt{\exp(a) \times \exp(b)}$.

Soit $c < x \le b$, alors $\exp(c) < \exp(x) \le \exp(b)$, on pose alors a = c et on recommence.

Soit $a \le x \le c$, alors $\exp(a) \le \exp(x) \le \exp(c)$, on pose alors b = c et on recommence.

Avec Excel :

	A	B	C	D	E	F
1	exp(1)=	2,71828182845905				
2	x=	0,7				
3	a	b	c	exp(a)	exp(b)	exp(c)
4	0,00000000000000	1,00000000000000	0,50000000000000	1,00000000000000	2,71828182845905	1,64872127070013
5	=SI(B2>C4;C4;A4)	=SI(B2>C4;B4;C4)	=(A5+B5)/2	=SI(B2>C4;F4;D4)	=SI(B2>C4;E4;F4)	=(D5*E5)^0,5

Selon le schéma ci-dessus, compléter ce tableau pour proposer une valeur de exp(0,7).
On joindra une copie du tableau (faire les calculs avec 14 chiffres après la virgule).

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{pour } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$
2. Pour x > 0, calculer $\frac{f(x) - f(0)}{x}$.

   Etudier la limite de cette expression quand x tend vers 0^+ (on pourra utiliser, pour n entier naturel, $\lim\limits_{u \to -\infty} u^n e^u = 0$).

   Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
3. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^3}$.
4. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(x) - (x-3) = xe^{-1/x} - x - 2e^{-1/x} + 3 - \frac{e^{-1/x}}{x}$.

   En déduire que la droite d'équation y = x – 3 est asymptote à la courbe en $\pm\infty$ (on pourra utiliser $\lim\limits_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$).
6. Tracer la courbe.