

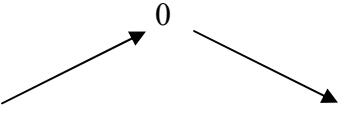
Soit (H_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = H_n - \ln n$.

1. Pour tout $x > -1$, on pose $f(x) = \ln(1+x) - x$; alors $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$.

D'où le tableau de variations suivant :

x	-1	0	$+\infty$
f'(x)		+	-
f(x)		0	



Donc, pour tout $x > -1$, $f(x) \leq 0$, soit $\ln(1+x) \leq x$.

Si $x < 1$, alors $-x > -1$, donc $\ln(1-x) \leq -x$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln n + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1).$$

b) Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, $\ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

Pour $n = 2$, $\ln 2 \leq 1 = \ln e$.

Si, pour $n \geq 2$ quelconque, la propriété est vraie, alors :

$$\ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \text{ et d'après 1,}$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}, \text{ d'où, par addition et d'après 2a,}$$

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 2$.

c) Pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n$, donc $u_n = H_n - \ln n \geq \ln(n+1) - \ln n > 0$.

Donc la suite (u_n) est positive.

3. a) Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n-1) \right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

b) D'après 1, pour tout $n \geq 2$, $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}$, donc $u_n - u_{n-1} \leq 0$.

La suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et positive, donc elle converge.

Sa limite est la constante d'Euler, notée γ .

(Une valeur approchée de γ est : 0,57721566490153286...)