

Méthode de Simpson

I. On veut montrer que la formule $\int_a^b g(x)dx = \frac{b-a}{6}(g(a) + 4g(c) + g(b))$, où $c = \frac{a+b}{2}$, est vérifiée si g est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

a) Montrer que la formule est vérifiée pour les polynômes $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2$.

b) En utilisant la linéarité de l'intégrale, montrer que la formule est vérifiée pour tout polynôme $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

c) Montrer que la formule est aussi vérifiée pour le polynôme $x \mapsto x^3$.

d) En déduire que la formule est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

e) Calculer $\int_1^3 (2x^3 - 7x + 3)dx$ avec cette formule.

II. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Soit $y = P(x)$, où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, une équation de la courbe passant par les points $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ et $(b, f(b))$ où $c = \frac{a+b}{2}$.

On approchera $\int_a^b f(x)dx$ par $\int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(c) + f(b))$, cette approximation est d'autant meilleure que la largeur de l'intervalle est petite.

On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en $2n$ intervalles de même largeur, on pose $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_i = a + ih$ pour $i = 0..2n$.

Montrer que l'on peut approcher $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$ par

$$K_n = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n})) - f(x_{2n})).$$

Si f est 4 fois continûment dérivable sur $[a, b]$, on peut montrer que si M est un majorant de $|f^{(4)}|$ sur

$$[a, b], \text{ alors } \left| \int_a^b f(x)dx - K_n \right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}.$$

III. Un exemple. Soit $I = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+x^2} dx$.

En utilisant le tableur Excel, calculer une valeur approchée de I en prenant $n = 2$.

	A	B	C	D	E
9	n=	2	h=	0,5	
10	0	-1	0,18393972	0,18393972	
11	1	-0,5	0,48522453	1,94089811	
12	2	0	1	2	
13	3	0,5	1,31897702	5,27590807	
14	4	1	1,35914091	2,71828183	1,79331447

Faites les saisies ci-dessous :

$$B9 = 2, D9 = 2/(B9*2)$$

$$A10 = 0, B10 = -1, C10 = \text{EXP}(B10)/(1+(B10)^2), D10 = C10$$

$$A11 = A10 + 1, B11 = B10 + \$D\$9, C11 = \text{EXP}(B11)/(1+(B11)^2),$$

$$D11 = \text{SI}((A11-2*\text{ENT}(A11/2)=0); 2*C11; 4*C11)$$

Sélectionner la plage A11 – D11 et la recopier jusqu'à A14 – D14 avec la poignée de recopie.

$$E14 = (\text{SOMME}(\$D\$10:D14) - D14/2) * \$D\$9/3$$

Calculer une valeur approchée de I pour $n = 5, 10$ puis 15 ; pour cela, changer la valeur de n et recopier les cellules A14 – E14 tant que nécessaire.