Méthode de Simpson

I. La formule $\int_a^b g(x)dx = \frac{b-a}{6}(g(a)+4g(c)+g(b))$, où $c = \frac{a+b}{2}$, est vérifiée si g est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

a) La formule est vérifiée pour les polynômes $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ et $P_2(x)=x^2$.

$\int_a^b P_0(x)dx = b-a$ et $\frac{b-a}{6}(P_0(a)+4P_0(c)+P_0(b)) = \frac{b-a}{6}\times 6 = b-a$.

$\int_a^b P_1(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ et

$$\frac{b-a}{6}(P_1(a)+4P_1(c)+P_1(b)) = \frac{b-a}{6}(a+2(a+b)+b) = \frac{b-a}{6}\times 3(a+b) = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{b^3-a^3}{3}$ et

$$\frac{b-a}{6}(P_2(a)+4P_2(c)+P_2(b)) = \frac{b-a}{6}(a^2+(a+b)^2+b^2) = \frac{b-a}{3}(a^2+ab+b^2) = \frac{b^3-a^3}{3}$$

b) La formule est vérifiée pour tout polynôme $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. En effet :

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b \alpha P_2(x)+\beta P_1(x)+\gamma P_0(x)dx = \alpha\int_a^b P_2(x)dx + \beta\int_a^b P_1(x)dx + \gamma\int_a^b P_0(x)dx$$

$$= \alpha\frac{b-a}{6}(P_2(a)+4P_2(c)+P_2(b)) + \beta\frac{b-a}{6}(P_1(a)+4P_1(c)+P_1(b)) + \gamma\frac{b-a}{6}(P_0(a)+4P_0(c)+P_0(b))$$

$$= \frac{b-a}{6}((\alpha P_2(a)+\beta P_1(a)+\gamma P_0(a)) + 4(\alpha P_2(c)+\beta P_1(c)+\gamma P_0(c)) + (\alpha P_2(b)+\beta P_1(b)+\gamma P_0(b)))$$

$$= \frac{b-a}{6}(P(a)+4P(c)+P(b)) \quad \text{CQFD.}$$

c) La formule est aussi vérifiée pour le polynôme $x \mapsto x^3$. En effet :

$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4-a^4}{4}$ et

$$\frac{b-a}{6}\left(a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right) = \frac{b-a}{12}\left(2a^3+(a+b)^3+2b^3\right) = \frac{b-a}{12}(3a^3+3a^2b+3ab^2+3b^3)$$

$$= \frac{b-a}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = \frac{b^4-a^4}{4} \qquad \text{CQFD.}$$

d) De la même façon qu'en b), on en déduit que la formule est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

e) $\int_1^3 (2x^3-7x+3)dx = \frac{2}{6}(P(1)+4P(2)+P(3)) = \frac{1}{3}(36+20-2) = 18.$

II. Soit f une fonction continue sur [a, b].

Soit $y = P(x)$, où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, une équation de la courbe passant par les points (a, f(a)), (c, f(c)) et (b, f(b)) où $c = \frac{a+b}{2}$.

On approchera $\int_a^b f(x)dx$ par $\int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(c)+f(b))$, cette approximation est d'autant meilleure que la largeur de l'intervalle est petite.

On subdivise l'intervalle [a, b] en 2n intervalles de même largeur, on pose $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_i = a + ih$ pour i = 0..2n.

On peut approcher $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$ par

$$K_n = \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)) + \frac{h}{3}(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)) + .. + \frac{h}{3}(f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n}))$$

$$= \frac{h}{3}(f(x_0)+4(f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{2n-1}))+2(f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{2n}))-f(x_{2n})).$$

Si f est 4 fois continûment dérivable sur [a, b], on peut montrer que si M est un majorant de $\left|f^{(4)}\right|$ sur [a, b], alors $\left|\int_a^b f(x)dx - K_n\right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}$.

On retrouve ici que la formule est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

III. Un exemple. Soit $I = \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1+x^2} dx$.

Pour n= 5, plage A20-E20

10	1	1,35914091	2,71828183	1,79552141

Pour n = 10, plage A30-E30

20	1	1,35914091	2,71828183	1,79552131

Pour n = 15, plage A40-E40

30	1	1,35914091	2,71828183	1,79552129

Pour n = 20, plage A50-E50

40	1	1,35914091	2,71828183	1,79552129