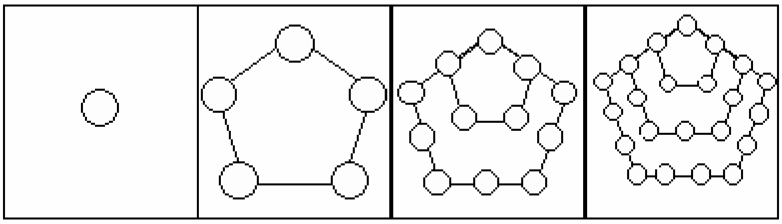
Quelques propriétés des nombres pentagonaux



1 5 12 22

Plus généralement, pour n entier naturel strictement positif, on appelle P(n) le nième nombre pentagonal.

1. Dans le cas du (n+1)ième nombre pentagonal, les côtés du pentagone extérieur ont n+1 points, on en déduit aisément que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n+1) = P(n) + 3(n+1) - 2 = P(n) + 3n + 1$ (1).

2. Les 20 premiers nombres pentagonaux sont : 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, 330, 376, 425, 477, 532, 590.

3. En écrivant la relation (1) pour p = 1..(n-1), ici n est supérieur ou égal à 2, on a :

P(2) = P(1) + 3x1 + 1

P(3) = P(2) + 3x2 + 1

.

.

P(n) = P(n-1) + 3x(n-1) + 1

En sommant, on trouve que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$P(n) = 3(1+2+3+..+(n-1)) + n = 3\dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$ (2). Formule encore valable pour n = 1.

4. Calculons $p(3p-1)$ pour p = 0..9 :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p(3p-1)	0	2	10	24	44	70	102	140	184	234

On en déduit que $n(3n-1)$ se termine par 0, 4 ou 2, donc un nombre pentagonal se termine par 0, 5, 2, 7, 1 ou 6. Ainsi P(n) ne se termine jamais par 3, 4, 8 ou 9.

5. Quelques propriétés.

Rappel : le nième nombre triangulaire est $T(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on pose T(0) = 0.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3T(n-1) + n = 3\dfrac{n(n-1)}{2} + n = P(n)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T(n-1) + n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} + n^2 = \dfrac{3n^2 - n}{2} = P(n)$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{3}T(3n-1) = \frac{3n(3n-1)}{6} = \frac{n(3n-1)}{2} = P(n)$ (un nombre pentagonal est le tiers d'un nombre triangulaire).

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T(n) + T(n-1) + T(n-1) = \frac{1}{2}(n^2 + n + n^2 - n + n^2 - n) = \frac{1}{2}(3n^2 - n) = P(n)$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $24P(n) + 1 = 12(3n^2 - n) + 1 = 36n^2 - 12n + 1 = (6n-1)^2$.

6. Dans cette question, on va montrer que $X(n) = 1 + 25 + 25^2 + ... + 25^{2n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, est un nombre pentagonal.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X(n) est une somme de 2n+1 termes consécutifs d'une progression géométrique de raison 25 et de premier terme 1, on en déduit que $X(n) = \frac{1 - 25^{2n+1}}{1 - 25} = \frac{(5^{2n+1})^2 - 1}{24}$.

b) On pose $y = 5^{2n+1}$. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, 5^{2n+1} est un multiple de 6 moins 1.

La propriété est vraie pour n = 0, en effet 5 = 6 – 1.

Supposons la propriété vraie pour n quelconque, soit $5^{2n+1} = 6a - 1$ où a est un entier, alors $5^{2n+3} = (6a-1) \times 25 = (6a-1) \times (24-1) = 6b - 1$, où b est un entier ; donc la propriété est héréditaire.

On en déduit, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tout entier n.

c) On peut donc poser $y = 6k - 1$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Il s'ensuit que :

$$X(n) = \frac{y^2 - 1}{24} = \frac{(6k-1)^2 - 1}{24} = \frac{(6k-2)6k}{24} = \frac{(3k-1)k}{2} = P(k).$$

7. Le nombre 1 est à la fois triangulaire, carré et pentagonal.

a) 210 = P(12) = T(20), c'est un nombre triangulaire et pentagonal. C'est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est 40755.

b) 9801 = 99^2 = P(81), c'est un nombre carré et pentagonal. C'est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est 94109401.

8. Un théorème d'Euler : tout entier non nul peut s'écrire comme la somme d'au plus cinq nombres pentagonaux.

a) Liste de tous les quintuplets (i, j, k, l, m) tels que:

$220 = P(i) + P(j) + P(k) + P(l) + P(m)$ avec $i \leq j \leq k \leq l \leq m$, en posant P(0) = 0.

0, 0, 2, 2, 12   0, 0, 2, 7, 10   0, 0, 4, 4, 11   0, 1, 5, 8, 8,   0, 1, 6, 6, 9   0, 2, 5, 5, 10

0, 3, 3, 6, 10   1, 1, 4, 6, 10   1, 2, 2, 8, 9   1, 4, 5, 7, 8   2, 2, 3, 4, 11   2, 2, 7, 7, 7

2, 3, 5, 6, 9   3, 3, 3, 8, 8

b) Exemples de décomposition de 2008 comme somme d'au plus cinq nombres pentagonaux (il y en a 164 au total).

0, 0, 3, 7, 36   0, 3, 8, 14, 33   1, 1, 1, 25, 27   3, 7, 14, 18, 28   6, 7, 11, 16, 30   14, 15, 16, 17, 20