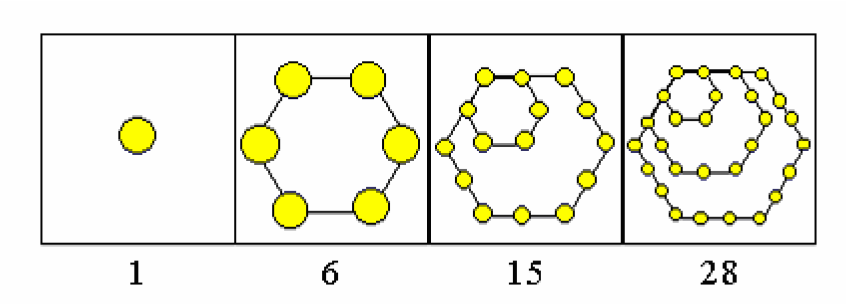
Quelques propriétés des nombres hexagonaux



Plus généralement, pour n entier naturel strictement positif, on appelle H(n) le nième nombre hexagonal.

1. Dans le cas du (n+1)ième nombre hexagonal, les côtés de l'hexagone extérieur ont n+1 points, on en déduit aisément que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(n+1) = H(n) + 4(n+1) - 3 = H(n) + 4n + 1$ (1).

2. Les 20 premiers nombres hexagonaux sont : 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276, 325, 378, 435, 496, 561, 630, 703, 780.

3. Soit (u_n) une progression arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_1 = 1$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$, il s'ensuit que :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(4n-2)}{2} = n(2n-1).$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = S_n + 4(n+1) - 3 = S_n + 4n + 1$.

c) On a : $H(1) = 1$ et $S_1 = 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(n+1) = H(n) + 4n + 1$ et $S_{n+1} = S_n + 4n + 1$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(n) = S(n) = n(2n-1)$.

4. Calculons $p(2p-1)$ pour p = 0..9 :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p(2p-1)	0	1	6	15	28	45	66	91	120	153

On en déduit que H(n) = $n(2n-1)$ ne se termine jamais par 2, 4, 7 ou 9

5. Quelques propriétés.

Le nième nombre triangulaire est $T(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, on pose T(0) = 0.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T(2n-1) = \frac{(2n-1)2n}{2} = n(2n-1) = H(n)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4T(n-1) + n = 2(n-1)n + n = n(2n-1) = H(n)$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3T(n-1) + T(n) = \frac{3(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(4n-2)}{2} = n(2n-1) = H(n)$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $32H(n) + 4 = 32n(2n-1) + 4 = 64n^2 - 32n + 4 = (8n-2)^2$.

6. Dans cette question, on va montrer que $X(n)=1+9+9^2+...+9^{2n}$, où $n\in\mathbb{N}^*$, est un nombre hexagonal.

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X(n) est une somme de 2n+1 termes consécutifs d'une progression géométrique de raison 9 et de premier terme 1, on en déduit que $X(n)=\dfrac{1-9^{2n+1}}{1-9}=\dfrac{(3^{2n+1})^2-1}{8}$.

b) On pose $y=3^{2n+1}$. Montrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, 3^{2n} est un multiple de 4 plus 1.

La propriété est vraie pour n = 1, en effet 9 = 8 + 1.

Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$ quelconque, soit $3^{2n}=4p+1$ où p est un entier naturel, alors $3^{2(n+1)}=(4p+1)9=36p+9=4(9p+2)+1=4q+1$, où q est un entier naturel; donc la propriété est héréditaire.

On en déduit, par le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

c) On peut donc poser $3^{2n}=4p+1$, où $p\in\mathbb{N}^*$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}X(n)&=\frac{(3^{2n+1}-1)(3^{2n+1}+1)}{8}=\frac{(3(4p+1)-1)(3(4p+1)+1)}{8}\\&=\frac{(12p-2)(12p+4)}{8}=(3p+1)(6p+1)=H(3p+1)\end{aligned}.$$

7. Le nombre 1 est à la fois carré, pentagonal et hexagonal.

a) 1225 = 35^2 = H(25), c'est un nombre carré et hexagonal. C'est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est 1413721 = 1189^2 = H(841).

b) 40755 = P(165) = H(143), c'est un nombre pentagonal et hexagonal. C'est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est 1533776805 = P(31977) = H(27693).

8. Un théorème d'Euler : tout entier non nul peut s'écrire comme la somme d'au plus six nombres hexagonaux.

a) Liste de tous les 6-uplets (i, j, k, l, m,n) tels que:

$220=H(i)+H(j)+H(k)+H(l)+H(m)+H(n)$ avec $i\le j\le k\le l\le m\le n$, en posant H(0) = 0.

0, 0, 0, 1, 6, 9	0, 0, 0, 3, 3, 10	0, 0, 1, 1, 4, 10	0, 0, 2, 4, 6, 8	0, 1, 2, 3, 5, 9
0, 3, 4, 5, 6, 6	0, 4, 4, 4, 5, 7	1, 1, 1, 2, 7, 8	1, 2, 3, 6, 6, 6	1, 2, 4, 4, 6, 7
1, 3, 4, 4, 4, 8	2, 2, 2, 2, 2, 10	2, 2, 2, 5, 6, 7	2, 2, 3, 4, 5, 8	

b) Exemples de décomposition de 2009 comme somme d'au plus six nombres hexagonaux (il y en a 351 au total).

0, 0, 0, 4, 22, 23   0, 0, 1, 9, 18, 25   0, 1, 2, 5, 6, 31   1, 2, 3, 7, 21, 23