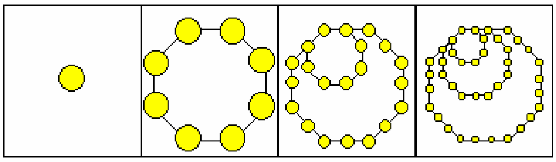
Quelques propriétés des nombres octogonaux



1 8 21 40

Plus généralement, pour n entier naturel strictement positif, on appelle O(n) le nième nombre octogonal.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $O(n+1) = O(n) + 6(n+1) - 5 = O(n) + 6n + 1$ (1).
2. Calculer les 20 premiers nombres octogonaux.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 3n^2 - 2n$.

a) Montrer que la suite (S_n) vérifie la propriété (1).

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $O(n) = n(3n-2)$.

4. Calculer $p(3p-2)$ pour p = 0..9, en déduire qu'un nombre octogonal ne se termine jamais par 2, 4, 7 ou 9.
5. Quelques propriétés

Le nième nombre triangulaire est $T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on pose T(0) = 0.

Le nième nombre pentagonal est $P(n) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

Le nième nombre hexagonal est $H(n) = n(2n-1)$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $O(n) = 6T(n) - 5n = 6T(n-1) + n$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $O(n) = P(n) + 3T(n-1)$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $O(n) = H(n) + 2T(n-1)$

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3O(n) + 1 = (3n-1)^2$.

6. Dans cette question, on va montrer que $X(n) = 1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{2n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, est un nombre octogonal.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X(n) = \dfrac{(2^{2n+1}-1)(2^{2n+1}+1)}{3}$.

b) Calculer $1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{n-1}$. En déduire que $2^{2n} - 1$ est un multiple de 3. En posant $2^{2n} - 1 = 3q$, $q \in \mathbb{N}^*$, montrer que $2^{2n+1} + 1$ est un multiple de 3.

c) On déduire que X(n) est un nombre octogonal.

7. Le nombre 1 est à la fois octogonal, hexagonal, pentagonal, carré et triangulaire.

a) Vérifier que 21 est un nombre octogonal et triangulaire. C’est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est 11781.

b) Vérifier que 225 est un nombre octogonal et carré. C’est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est 43681.

c) Vérifier que 176 est un nombre octogonal et pentagonal. C’est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est 1575425.

d) Vérifier que 11781 est un nombre octogonal et hexagonal. C’est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est 113123361.

8. Un théorème d’Euler dit que tout entier non nul peut s'écrire comme la somme d'au plus huit nombres octogonaux. Nous allons simplement le vérifier sur deux exemples.

a) Vérifier que $220 = O(1) + O(1) + O(2) + O(2) + O(2) + O(3) + O(4) + O(7)$. Proposer une solution où 220 est écrit comme somme de quatre nombres octogonaux, puis comme somme de cinq nombres octogonaux.

b) Proposer au moins trois solutions de décomposition de 2010 comme somme d’au plus huit nombres octogonaux (il y en a 965 au total).