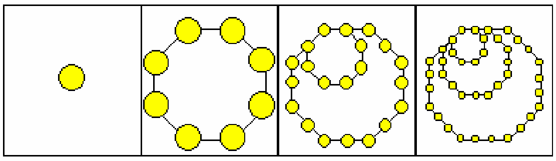

1. Dans le cas du (n+1)ième nombre octogonal, les côtés de l'octogone extérieur ont n+1 points, on en déduit aisément que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $O(n+1) = O(n) + 6(n+1) - 5 = O(n) + 6n + 1$ (1).

2. Les 20 premiers nombres octogonaux sont : 1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280, 341, 408, 481, 560, 645, 736, 833, 936, 1045, 1160.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 3n^2 - 2n$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$S_{n+1} - S_n = 3(n+1)^2 - 2(n+1) - 3n^2 + 2n = 6n + 1$.

b) $O(1) = S_1$ et les suites $O(n)$ et S_n vérifient la propriété de récurrence (1), donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $O(n) = S_n$.

4. Calculons $p(3p-2)$ pour p = 0..9 :

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p(3p-2)	0	1	8	21	40	65	96	133	176	225

On en déduit que O(n) = $n(3n-2)$ ne se termine jamais par 2, 4, 7 ou 9.

5. Quelques propriétés

Le nième nombre triangulaire est $T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on pose T(0) = 0.

Le nième nombre pentagonal est $P(n) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

Le nième nombre hexagonal est $H(n) = n(2n-1)$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$6T(n) - 5n = 3n(n+1) - 5n = 3n^2 - 2n = O(n)$,
$6T(n-1) + n = 3n(n-1) + n = 3n^2 - 2n = O(n)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$P(n) + 3T(n-1) = \frac{n(3n-1)}{2} + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n = O(n).$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$H(n) + 2T(n-1) = n(2n-1) + n(n-1) = 3n^2 - 2n = O(n)$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$3O(n) + 1 = 9n^2 - 6n + 1 = (3n-1)^2$.

6. Dans cette question, on va montrer que $X(n) = 1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{2n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, est un nombre octogonal.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X(n) est une somme de 2n+1 termes consécutifs d'une progression géométrique de raison 4 et de premier terme 1, on en déduit que $X(n) = \frac{1-4^{2n+1}}{1-4} = \frac{(2^{2n+1})^2 - 1}{3} = \frac{(2^{2n+1}-1)(2^{2n+1}+1)}{3}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1+4+4^2+...+4^{n-1} = \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{2^{2n}-1}{3}$, donc $2^{2n}-1$ est divisible par 3.

Posons $2^{2n}-1 = 3q$, où $q \in \mathbb{N}^*$, alors $2^{2n+1}+1 = 2\times 2^n + 1 = 2(3q+1)+1 = 6q+3$, donc $2^{2n+1}+1$ est un multiple de 3.

c) Il s'ensuit que $X(n) = \frac{(2^{2n+1}-1)(2^{2n+1}+1)}{3} = \frac{(6q+1)(6q+3)}{3} = (2q+1)(6q+1) = O(2q+1)$.

7. Le nombre 1 est à la fois octogonal, hexagonal, pentagonal, carré et triangulaire.

a) $21 = O(3) = T(6)$, c'est un nombre octogonal et triangulaire. C'est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est $11781 = O(63) = T(153)$.

b) $225 = O(9) = 15^2$, c'est un nombre octogonal et carré. C'est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est $43681 = O(121) = 209^2$.

c) $176 = O(8) = P(11)$, c'est un nombre octogonal et pentagonal. C'est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est $1575425 = O(725) = P(1025)$.

d) $11781 = O(63) = H(73)$, c'est un nombre octogonal et hexagonal. C'est le plus petit après 1 à avoir cette propriété. Le prochain est $113123361 = O(6141) = H(7521)$.

8. Un théorème d'Euler : tout entier non nul peut s'écrire comme la somme d'au plus huit nombres octogonaux.

a) Liste de tous les 8-uplets (i, j, k, l, m, n, o, p) tels que:

$220 = O(i) + O(j) + O(k) + O(l) + O(m) + O(n) + O(o) + O(p)$ avec $i \le j \le k \le l \le m \le n \le o \le p$,

en posant O(0) = 0.

0, 0, 0, 0, 1, 3, 5, 7	0, 0, 0, 1, 1, 3, 3, 8	0, 0, 1, 1, 1, 1, 4, 8	0, 0, 2, 3, 3, 4, 5, 5
0, 0, 3, 3, 3, 3, 4, 6	0, 1, 1, 2, 4, 4, 5, 5	0, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 6	0, 1, 2, 2, 2, 5, 5, 5
0, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 6	0, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 7	1, 1, 1, 1, 3, 5, 5, 5	1, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 6
1, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 6	1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 7	1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 7	

b) Exemples de décomposition de 2010 comme somme d'au plus huit nombres octogonaux (il y en a 965 au total).

0, 0, 0, 0, 1, 2, 8, 25	0, 0, 0, 1, 1, 4, 14, 22	0, 0, 1, 1, 1, 11, 17, 17
0, 1, 1, 1, 1, 9, 16, 19	1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 26	