Exercice 1

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I. On note C la courbe représentative de f.

1. On suppose que, pour tout x de I, $f''(x) \geq 0$. Soit $a \in I$.

   Ecrire une équation de la tangente D au point d'abscisse a.

   Si $y = g(x)$ est une équation de D, on pose $h(x) = f(x) - g(x)$. Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$.

   En déduire que, pour tout x de I, $h(x) \geq 0$.

   En déduire que sur I, la courbe est au-dessus de toutes ses tangentes. Une telle courbe est dite convexe.

2. On suppose que, pour tout x de I, $f''(x) \leq 0$.

   Montrer que sur I, la courbe est au-dessous de toutes ses tangentes. (on pourra utiliser -f)

   La courbe est alors dite concave.

3. Si f '' s'annule et change de signe en a, la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a, un tel point est un point d'inflexion. Chercher les points d'inflexion si $f(x) = (x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12)/12$. Construire soigneusement la courbe avec les deux tangentes aux points d'inflexion.

Exercice 2

Le but de l'exercice est l'étude de $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.

Soit C la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Justifier que f est dérivable sur $D = \mathbb{R} - \{0,2\}$.
2. Dériver la fonction f^3 sur D. En déduire $f'(x)$ pour $x \in D$.
3. Etudier la dérivabilité de f en 0 et 2. Quelles conséquences peut-on en déduire pour C ?
4. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - \frac{2}{3}$ est asymptote à la courbe C en $\pm\infty$. (on pourra utiliser $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$)
5. Faire le tableau de variations.
6. Chercher le(s) point(s) d'intersection de C et Δ.
7. Tracer C et Δ.