

Exercice 1

- Si $\text{card } E = n$, alors $\text{card } P(E) = 2^n$.
- Il y a n façons de choisir la boule de la boîte A et 2^{n-1} façons de choisir un sous-ensemble de boule(s), parmi les $n-1$ restantes, à mettre dans la boîte B.
D'après le principe multiplicatif, le nombre d'échantillons est donc de $n2^{n-1}$.
 - Si l'échantillon est constitué de p boule(s) ($1 \leq p \leq n$).
Il y a $\binom{n}{p}$ sous-ensembles de p boules choisies parmi les n boules. Ce choix étant fait, il y a p façons de choisir dans ce sous-ensemble la boule à mettre dans la boîte A.
 - En distinguant les échantillons par leur nombre de boules, on crée une partition de l'ensemble des échantillons, $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + p\binom{n}{p} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.
- Avec la formule du binôme, pour tout x , on a :

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{p}x^p + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$
En dérivant chaque membre, pour tout x , on a :

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \dots + p\binom{n}{p}x^{p-1} + \dots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$
En particulier, pour $x = 1$, on a :

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + p\binom{n}{p} + \dots + n\binom{n}{n}.$$

Exercice 2

- $$\sum_{k=0}^n I_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} dx = \int_0^1 (x+1-x)^n dx = \int_0^1 1 dx = 1.$$
- $$1 \leq k \leq n, \quad I_k = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} dx.$$

On procède à une intégration par parties :

$$u(x) = \binom{n}{k} x^k \quad u'(x) = k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

$$v'(x) = (1-x)^{n-k} \quad v(x) = -\frac{1}{n-k+1} (1-x)^{n-k+1}$$

La formule d'IPP donne :

$$I_k = \int_0^1 \frac{k}{n-k+1} \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-(k-1)} dx = \int_0^1 \binom{n}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-(k-1)} dx = I_{k-1},$$

car $\frac{k}{n-k+1} \binom{n}{k} = \frac{k}{n-k+1} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \binom{n}{k-1}.$
- $I_0 = I_1 = \dots = I_n$ et $\sum_{k=0}^n I_k = 1$, on en déduit que, pour tout $k = 0..n$, $I_k = \frac{1}{n+1}.$

Exercice 3

- $$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) = P_M(T).P(M) + P_{\overline{M}}(T).P(\overline{M})$$

$$= \frac{999}{10^3} \times \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^4} \times \frac{9999}{10^4} = \frac{10998}{10^7} = 0,0010998$$

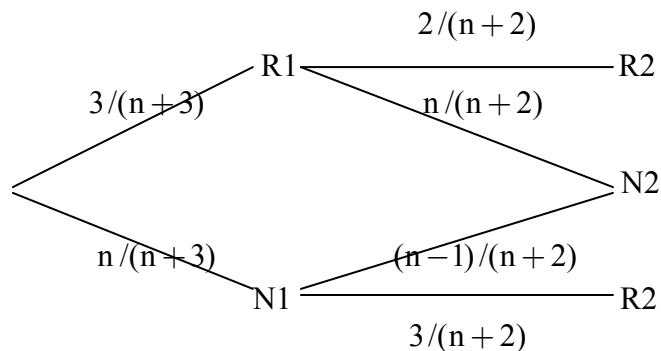
$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{999}{10^7} \times \frac{10^7}{10998} = \frac{111}{1222} \approx 0,0908$$

$$P_T(\overline{M}) = 1 - P_T(M) = 1 - \frac{111}{1222} = \frac{1111}{1222} \approx 0,9092$$

$$2. \quad P(T) = \frac{1098}{10^5} = 0,01098, \quad P_T(M) = \frac{111}{122} \approx 0,9098, \quad P_T(\overline{M}) = \frac{11}{122} \approx 0,0902.$$

Exercice 4

1. Avec un arbre pondéré :

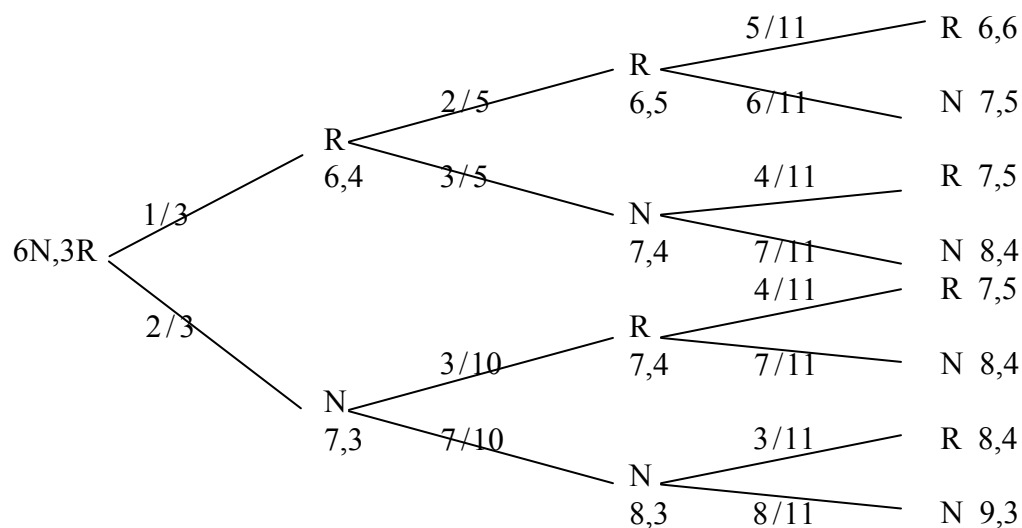


$$P(R1 \cap R2) = \frac{6}{(n+2)(n+3)}$$

$$P(N1 \cap N2) = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)}$$

$$P(N1 \cap R2) + P(R1 \cap N2) = \frac{6n}{(n+2)(n+3)}$$

2. Avec un arbre :



A : "autant de rouges que de noires"

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{11} = \frac{2}{33}$$

B : "deux fois plus de noires que de rouges"

$$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{11} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{11} + \frac{2}{3} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{11} = \frac{21}{55}$$