Exercice 1

On considère 7 boules numérotées de 1 à 7. L'expérience consiste à en tirer simultanément 3.

1. Soit k un entier vérifiant $3 \leqslant k \leqslant 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?
2. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} \binom{k-1}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.

Exercice 2

Un quincaillier achète des ampoules à trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20 % au premier fournisseur, 50 % au deuxième fournisseur et 30 % au troisième fournisseur.

Le premier fournisseur fabrique 97 % d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 98 % d'ampoules sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 95 % d'ampoules sans défaut.

1. On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note D l'événement « l'ampoule est défectueuse », F_1 l'événement « l'ampoule provient du premier fournisseur », F_2 l'événement « l'ampoule provient du deuxième fournisseur » et F_3 l'événement « l'ampoule provient du troisième fournisseur ».
   (a) Calculer la probabilité de l'événement D, notée $P(D)$.
   (b) Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité $P_D(F_1)$ qu'elle provienne du premier fournisseur ?
   Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près de $P_D(F_1)$.
2. On suppose que la probabilité qu'une ampoule soit sans défaut est de 0,969.
   On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité R qu'une ampoule au plus soit défectueuse.
   On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de R.
3. La durée de vie en heures d'une ampoule, notée T, suit une loi de durée de vie sans vieillissement (ou loi exponentielle) de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{50\,000} = 2.10^{-5}$.
   Selon cette loi, pour tout x de $[0, +\infty[$, $\quad P(T \leqslant x) = \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt$.
   (a) Quelle est la probabilité P_1 qu'une ampoule dure plus de 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_1.
   (b) Quelle est la probabilité P_2 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_2.
   (c) Quelle est la probabilité P_3 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures, sachant qu'elle a déjà duré 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_3.

Exercice 3

On note $p_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.
Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note :
   – A_0 l'événement : « on n'a obtenu aucune boule noire » ;
   – A_1 l'événement : « on a obtenu une seule boule noire » ;
   – A_2 l'événement : « on a obtenu deux boules noires ».
   Calculer les probabilités de A_0, A_1 et A_2.
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.
   On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note :
   – B_0 l'événement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n° 2 » ;
   – B_1 l'événement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n° 2 » ;
   – B_2 l'événement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n° 2 ».
   (a) Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.
   (b) En déduire $p(B_0)$.
   (c) Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.
   (d) On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?
3. On considère l'événement R « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'une ».
   Montrer que $p(R) = \frac{1}{3}$.

Exercice 4

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.
Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres -2, -1, 0, 1, 2 et 3.
Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.
On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le carton de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés (A, a), (B, b) et $(C, 4)$ admettent un barycentre. On le note G.
2. (a) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   – E_1 : « G appartient à la droite (BC) » ;
   – E_2 : « G appartient au segment $[BC]$ ».
   (b) Montrer que la probabilité de l'événement E_3 « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\frac{2}{5}$. On pourra faire appel à des considérations de signe.
3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question **1.**
   On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'événement E_3.
   (a) Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.
   (b) Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à $0,999$.