Exercice 1

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50 €.
Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n, la probabilité de R_n et q_n, celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.

a. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

b. Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right)$ en fonction de q_n

c. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.

d. En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$.

2. Étude de la suite (p_n).

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

b. Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

c. Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, P(A) désigne la probabilité de A ; $P_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité avec : $p_i = P(X=i)$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients.
On considère les événements suivants :
C1 : "en 5 mn, un seul client se présente"
C2 : "en 5 mn, deux clients se présentent"
E1 : "le premier client achète de l'essence"
E2 : "le second client achète de l'essence"
E : "en 5 mn, un seul client achète de l'essence"

a. Construire l'arbre pondéré.
b. Calculer P(C1 $\cap$ E).
c. Montrer que P(C2 $\cap$ E) = 0,168.
d. En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes; déterminer la loi de probabilité de Y. Calculer l'espérance mathématique de Y.