Exercice 1

Soit k un entier ≥ 1, on note $N(k) = 111...1$ avec k chiffres 1. On appelle ces nombres des rep-units (répétition de l'unité).

1. Existe-t-il k tel que N(k) soit un multiple de 2? de 5?
2. A quelle condition sur k le nombre N(k) est-il un multiple de 3?
3. Quel est le plus petit N(k) divisible par 9?
4. En remarquant que $N(k) = 1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{k-1}$, montrer que : $9N(k) = 10^k - 1$.
5. a) Calculer les restes de la division de 10^n par 7 pour n compris entre 1 et 6.

   b) Pour k entier ≥ 1, démontrer que : $10^k \equiv 1[7]$ si et ssi k est un multiple de 6.

   c) En déduire que 7 divise N(k) si et ssi k est un multiple de 6.
6. Soit p premier > 5, montrer que p divise N(p-1). (on pourra utiliser le petit théorème de Fermat).

Exercice 2

Soit k un entier ≥ 1, on note $N(k) = 111...1$ avec k chiffres 1.

Soit N un nombre entier impair non multiple de 5, on veut montrer qu'il existe un multiple de N qui est un rep-units.

1. On note n = 9N. Justifier que PGCD(10, n) = 1.
2. Soit $E = \{10^q, q \in \mathbb{N}\}$. Justifier qu'il existe au moins deux éléments de E qui ont les mêmes restes dans la division euclidienne par n. En déduire qu'il existe deux entiers p et r, r > 0, tels que $n/(10^{p+r} - 10^p)$.
3. Montrer que $n/(10^r - 1)$. En déduire qu'il existe k entier tel que $kN = N(r)$.
4. Montrer que si $10^r \equiv 1[N]$, où r est un entier non nul, et si N n'est pas un multiple de 3, alors $N(r) \equiv 0[N]$.
5. a) Vérifier que 7, 11, 13, 21, 33, 37 et 39 divisent N(6).

   b) Vérifier que 27 divise N(27).

   c) Montrer que 31 divise N(15), que 43 divise N(21) et que 49 divise N(42).