

Exercice 1. France, juin 2004

1. Pour tout entier naturel n , on a: $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. a) Montrons, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.

$u_0 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que, pour n entier naturel quelconque, $u_n > n^2$, alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$. Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$, et $\lim n^2 = +\infty$, on en déduit, par un théorème de comparaison, que $\lim u_n = +\infty$.

3. On a : $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 9$, $u_3 = 16$, etc.

On peut donc conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.

Démontrons cette propriété par récurrence.

$u_0 = 1 = (0+1)^2$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que, pour n entier naturel quelconque, $u_n = (n+1)^2$, alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$. Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.

Exercice 2. Centre Etrangers, juin 2003

1. a) Pour tout $n > 0$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{n+1}{n} \right)^2$.

$\lim \frac{n+1}{n} = \lim \frac{n}{n} = 1$, donc $\lim v_n = \frac{1}{2}$.

b) Pour tout $n > 0$, $\frac{n+1}{n} > 1$, donc $v_n > \frac{1}{2}$.

c) Pour tout $n > 0$, on a :

$$v_n < \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 < \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} (\approx 4,45)$$

Le plus petit entier N tel que, si $n \geq N$, $v_n < \frac{3}{4}$, est 5.

d) Il s'ensuit que, pour tout $n \geq 5$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$, d'où $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$, car $u_n > 0$.

2. a) Montrons, par récurrence, que, pour tout $n \geq 5$, $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

$$u_5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 u_5 = u_5, \text{ donc la propriété est vraie pour } n = 5.$$

Supposons que, pour n entier naturel quelconque, $n \geq 5$, $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq \frac{3}{4} u_n \quad (\text{d'après 1d}) \\ &\leq \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 \quad (\text{d'après l'hypothèse de récurrence}) \\ &\leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} u_5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-5} u_5 \end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \geq 5$, $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

b) En utilisant 2a, on a, pour tout $n \geq 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n \leq \left(1 + \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right) u_5$.

c) En utilisant la formule qui donne la somme de termes consécutifs d'une progression géométrique, pour tout $n \geq 5$, on a :

$$1 + \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right) \leq 4.$$

D'après 2b, on en déduit que, pour tout $n \geq 5$, $S_n \leq 4u_5$.

3. Pour tout $n \geq 5$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$, donc la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est strictement croissante.

D'après 2c, cette suite est majorée.

La suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est croissante et majorée, donc, par un théorème du cours, elle converge.