Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1. **a.** Calculer u_1.

   b. Les valeurs de u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11} sont respectivement égales à :
   45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
   À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

Exercice 2

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :
pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

   On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :

   $$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
   Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n$.

3. Determiner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.

   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
   $0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8$

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.