Exercice 1

1. Soit x un réel positif ou nul, k un entier strictement supérieur à x .

a. Pour tout $n \geq k$, $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$.

La propriété est vraie pour $n = k$.

Supposons la propriété vraie pour $n \geq k$ quelconque, alors :

$$\begin{aligned} \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{k^n}{n!} \times \frac{k}{n+1} \leq \frac{k^k}{k!} \times \frac{k}{n+1} \quad (\text{d'après l'hypothèse de récurrence}) \\ &\leq \frac{k^k}{k!} \quad (\text{car } n \geq k \text{ donc } \frac{k}{n+1} \leq 1) \end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq k$.

b. Pour tout $n \geq k$, $0 \leq \frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{k^n} \times \frac{k^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$ (d'après a.)

c. $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$, donc $\lim \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$, d'où, par le théorème d'encadrement, $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$.

2. a. Pour tout $n \geq 2$, $\frac{n^{n-1}}{n!} = \frac{n}{2} \times \frac{n}{3} \times \dots \times \frac{n}{n} \geq 1$ (car ces $n-1$ quotients sont ≥ 1).

b. Pour tout $n \geq 2$, $\frac{n^n}{n!} = n \times \frac{n^{n-1}}{n!} \geq n$ (d'après a.).

Par un théorème de comparaison, on en déduit que $\lim \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

Exercice 2

$u_0 = 0$ et, pour tout n , $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ (1).

1. a. Montrons par récurrence que, pour tout n , $0 \leq u_n < 4$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons la propriété vraie pour n quelconque, alors on a :

$$0 \leq u_n < 4$$

$$\Rightarrow 4 \leq 3u_n + 4 < 16$$

$$\Rightarrow 2 \leq u_{n+1} < 4$$

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n .

b. Pour tout n , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{3u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} \\ &= \frac{(u_n - 4)(-u_n - 1)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} > 0 \quad (\text{car } 0 \leq u_n < 4) \end{aligned}$$

Donc la suite est strictement croissante.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle converge. Posons $\lim u_n = L$.

d. Par passage à la limite dans (1), on obtient $L = \sqrt{3L + 4}$. La suite est positive, donc $L \geq 0$.

On a :

$$L \geq 0, L = \sqrt{3L+4}$$

$$\Leftrightarrow L \geq 0, L^2 = 3L+4$$

$$\Leftrightarrow L \geq 0, (L-4)(L+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow L = 4$$

Conclusion : $\lim u_n = 4$.

2. a. Pour tout n , on a :

$$\begin{aligned} 4 - u_{n+1} &= 4 - \sqrt{3u_n + 4} \\ &= \frac{12 - 3u_n}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \\ &\leq \frac{3(4 - u_n)}{4 + 2} = \frac{4 - u_n}{2} \quad (\text{car } \sqrt{3u_n + 4} \geq 2) \end{aligned}$$

b. On en déduit, par récurrence, que, pour tout n , $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0) = \frac{4}{2^n}$.

D'où, par le théorème d'encadrement, $\lim u_n = 4$.

c. Pour tout n , $0 \leq v_n = (4 - u_n)n^2 \leq 4 \frac{n^2}{2^n}$.

Or $\lim \frac{n^2}{2^n} = 0$ (voir exercice du cours), d'où $\lim v_n = 0$.