Exercice 1

On considère une droite D munie d'un repère $(O;\vec{i})$. Soit (A_n) la suite de points de la droite D ainsi définie : A_0 est le point O, A_1 est le point d'abscisse 1, et, pour tout n, A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

1. a) Placer sur un dessin la droite D, les points $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ et A_6.

   On prendra 10 cm comme unité graphique.

b) Pour tout n, on note a_n l'abscisse du point A_n. Calculer a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6.

c) Pour tout n, justifier l'égalité $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$.

2. En écrivant la relation $2a_{k+2} = a_k + a_{k+1}$ pour k allant de 0 à n – 1, $n \geq 2$, et en sommant, montrer que, pour tout $n \geq 2$, $2a_{n+1} = -a_n + 2$. On peut vérifier que la propriété est aussi vraie pour n = 0 et n = 1.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout n, par $v_n = a_n - \frac{2}{3}$.

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$.

   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} \geq u_n + \frac{1}{2}$.

2. Monter par récurrence sur k que, pour tout k entier, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \geq k$.

3. En déduire que $\lim u_n = +\infty$.