Exercice 1. Soit n et k deux entiers supérieurs à 2.

1. $1+3+5+...+(2n-1)$ est la somme de n termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison 2, donc $1+3+5+...+(2n-1)=\dfrac{2n\times n}{2}=n^2$

De la même façon, on montre que :

$(2p+1)+(2p+3)+...+(2p+2n-1)=\dfrac{(4p+2n)\times n}{2}=(2p+n)\times n$, où $p\in\mathbb{N}$.

2. Montrons, en faisant une récurrence sur k, que n^k peut s'écrire comme somme de n entiers impairs consécutifs.

Pour k = 2, la propriété est vraie comme le montre la question 1.

Supposons la propriété vraie pour $k\ \geq 2$ quelconque.

Il existe donc un entier p tel que :

$n^k=(2p+1)+(2p+3)+...+(2p+2n-1)=(2p+n)\times n$.

De là : $n^{k+1}=n^2(2p+n)=n(2pn+n^2-n+n)$.

$n^2-n=n(n-1)$ est pair, donc $2pn+n^2-n$ est pair. Soit p' l'entier tel que $2pn+n^2-n=2p'$.

On a donc $n^{k+1}=n(2p'+n)$, on en déduit par la question 1 que :

$n^{k+1}=(2p'+1)+(2p'+3)+...+(2p'+2n-1)$. La propriété est donc héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $k\geq 2$.

Exemples :

$4^2=1+3+5+7$

$4^3=13+15+17+19$

$4^4=61+63+65+67$

$4^5=253+255+257+259$

Exercice 2. Soit $f,g:[0;1]\to\mathbb{R}$ deux applications continues telles que $(f(0)-g(0))(f(1)-g(1))\leq 0$.

Montrons qu'il existe $x_0\in[0;1]$ tel que $f(x_0)=g(x_0)$.

Posons, pour tout $x\in[0;1]$, $h(x)=f(x)-g(x)$.

La fonction h est continue sur [0; 1], car c'est une somme de fonctions continues sur cet intervalle. De plus $h(0)\times h(1)\leq 0$, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0\in[0;1]$ tel que $h(x_0)=0$, soit $f(x_0)=g(x_0)$.

Exercice 3. On considère l'équation : $x^3+3x-2=0$ (E)

1. Démontrons que cette équation admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x-2$.

f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout x, $f'(x)=3x^2+3>0$.

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Rappelons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	-2	2	$+\infty$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, au vu du tableau de variations et par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f admet un zéro unique α sur $\mathbb{R}$ qui appartient à $[0;1]$.

$f(0,596) \approx -0,0003$ et $f(0,597) \approx 0,0038$ donc 0,596 < α < 0,597.

2. Le but de la suite est de calculer la valeur exacte de α par la méthode de Cardan.

a. Soit u et v deux nombres réels.
On a :

$$\begin{aligned}(u+v)^3+3(u+v)-2 &= u^3+3u^2v+3uv^2+3(u+v)-2\\ &= u^3+3uv(u+v)+3(u+v)-2 \quad .\\ &= u^3+v^3+3(uv+1)(u+v)-2\end{aligned}$$

Si (u, v) est solution du système

$$\begin{cases} u^3+v^3=2 \\ uv=-1 \end{cases} \quad (S),$$

alors $u^3+v^3+3(uv+1)(u+v)-2=2+0-2=0$, donc u + v est solution de (E).

b. Pour tous réels u et v non nuls, on a :

$$\begin{cases} u^3+v^3=2 \\ uv=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3-\dfrac{1}{u^3}=2 \\ v=-\dfrac{1}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2-2u^3-1=0 \\ v=-\dfrac{1}{u} \end{cases} \qquad (S')$$

c. Résolvons l'équation : $X^2-2X-1=0$.
On a : $X^2-2X-1=(X-1)^2-2=(X-1-\sqrt{2})(X-1+\sqrt{2})$.
Les solutions de l'équation sont donc $X=1+\sqrt{2}$ ou $X=1-\sqrt{2}$.

d. Posons $u=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ et $v=-\dfrac{1}{u}$, alors (u,v) est solution de (S'), donc de (S).

On a : $v^3=2-u^3=1-\sqrt{2}$, d'où $v=\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$
Il s'ensuit, d'après 2a, que u + v est solution de (E). Or cette équation n'a qu'une solution, donc $\alpha=u+v=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.