

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}u_n + 1$.
2. Si la suite (u_n) converge, quelle est sa limite ?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n \leq 2$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{n+1}$. Conclure.

Exercice 2

Soit $f(x) = x^4 + x^3 - x + 1/2$.

Etudier les variations de la fonction f' .

Justifier qu'il existe une unique valeur α telle que $f'(\alpha) = 0$.

Montrer que $0,4 < \alpha < 0,5$.

En procédant par encadrement, montrer que $0,0896 < f(\alpha) < 0,2875$.

En déduire que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Un marcheur parcourt 12 km en une heure.

Soit $f(t)$ le nombre de kilomètres parcourus en t heure, $t \in [0, 1]$.

On pose $g(t) = f(t + 1/2) - f(t)$, $t \in [0, 1/2]$.

1. Calculer $g(0)$ et $g(1/2)$. En déduire que $12 = g(0) + g(1/2)$, puis que 6 est entre $g(0)$ et $g(1/2)$.
2. En déduire, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel le marcheur a parcouru exactement 6 km.