Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \dfrac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1!+2!+\ldots+n!+(n+1)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+1)!}+1 \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}+1 \\ &= \frac{1}{n+1}u_n+1 \end{aligned}.$$

2. Si la suite (u_n) converge, soit $L = \lim u_n$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}u_n + 1$ (1), et $\lim \dfrac{1}{n+1} = 0$, donc, par passage à la limite dans (1), on a : $L = 0 \times L + 1$, soit L = 1.

3. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le u_n \le 2$.

$u_1 = \dfrac{1!}{1!} = 1$, donc la propriété est vérifiée pour n = 1.

Supposons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, $1 \le u_n \le 2$, alors $\dfrac{1}{n+1}+1 \le \dfrac{1}{n+1}u_n + 1 \le \dfrac{2}{n+1}+1$.

Or, si $n \ge 1$, alors $n+1 \ge 2$, d'où $\dfrac{2}{n+1} \le 1$.

On en déduit que $1 \le u_{n+1} \le 2$. Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}u_n + 1 \le \dfrac{2}{n+1}+1$, car $u_n \le 2$, donc $0 \le u_{n+1} - 1 \le \dfrac{2}{n+1}$.

Or $\lim \dfrac{2}{n+1} = 0$, donc, par le théorème d'encadrement, $\lim(u_{n+1} - 1) = 0$, soit $\lim u_{n+1} = 1$.

Conclusion : $\lim u_n = 1$.

Exercice 2

Soit $f(x) = x^4 + x^3 - x + 1/2$.

Pour tout x, $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$, $f''(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1)$.

On en déduit le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$-1/2$		0		α		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+			
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-3/4	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$.

D'après le tableau de variations, la dérivée est strictement négative sur $]-\infty, 0]$.

La fonction f' est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, au vu du tableau de variations et d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f' admet un zéro unique α sur $[0, +\infty[$.

$f'(0,4) = -0,264$ et $f'(0,5) = 0,25$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$.

Si $0,4 < \alpha < 0,5$, on a :

$0,0256 < \alpha^4 < 0,0625$

$0,064 < \alpha^3 < 0,125$

$-0,5 < -\alpha < -0,4$

On en déduit que $0,0896 < f(\alpha) < 0,2875$.

D'après le signe de $f'(x)$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$; de plus $f(\alpha) > 0$, donc, pour tout x, f(x) > 0.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

Un marcheur parcourt 12 km en une heure.

Soit f(t) le nombre de kilomètres parcourus en t heure, $t \in [0,\ 1]$.

On pose $g(t) = f(t + 1/2) - f(t)$, $t \in [0,\ 1/2]$.

1. On a : $g(0) = f(1/2) - f(0) = f(1/2)$ et $g(1/2) = f(1) - f(1/2) = 12 - f(1/2)$.

On en déduit que $12 = g(0) + g(1/2)$, soit encore $6 = \dfrac{g(0) + g(1/2)}{2}$.

6 étant la moyenne arithmétique des deux nombres g(0) et $g(1/2)$, 6 est entre g(0) et $g(1/2)$.

2. La fonction f est naturellement continue sur $[0,\ 1]$, donc la fonction g est continue sur $[0,\ 1/2]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0,\ 1/2]$ tel que $g(c) = 6$, soit $f(c + 1/2) - f(c) = 6$.

Ainsi dans l'intervalle d'une demi-heure qu'est $[c,\ c + 1/2]$, le marcheur a parcouru exactement 6 km.